Teil III

Reguläre Sprachen und endliche Automaten
Teil 2: Komplement- und Produktautomat

Komplement von regulären Sprachen

Lemma

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Komplementbildung.

Komplement von regulären Sprachen

Mit anderen Worten:

Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\overline{L} = \Sigma^* - L \in \mathrm{REG}$.

Lemma

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Komplementbildung.

Komplement von regulären Sprachen

Mit anderen Worten:

Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\overline{L} = \Sigma^* - L \in \mathrm{REG}$.

Lemma

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Komplementbildung.

Beweisidee

- Nimm vollständigen DFA A mit $\mathcal{L}(A) = L$.
- Konstruiere DFA A' mit $\mathcal{L}(A') = \overline{L}$ durch Umbauen von A.
- A' akzeptiert genau dann, wenn A **nicht** akzeptiert.

Komplement von regulären Sprachen

Mit anderen Worten:

Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\overline{L} = \Sigma^* - L \in \mathrm{REG}$.

Lemma

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Komplementbildung.

Beweisidee

- Nimm vollständigen DFA A mit $\mathcal{L}(A) = L$.
- Konstruiere DFA A' mit $\mathcal{L}(A') = \overline{L}$ durch Umbauen von A.
- A' akzeptiert genau dann, wenn A **nicht** akzeptiert.

Der Komplementautomat

- Sei $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ vollständiger DFA.
- Sei $A' := (\Sigma, Q, \delta, q_0, (Q - F))$

Komplement von regulären Sprachen

Mit anderen Worten:

Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\overline{L} = \Sigma^* - L \in \mathrm{REG}$.

Lemma

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Komplementbildung.

Beweisidee

- Nimm vollständigen DFA A mit $\mathcal{L}(A) = L$.
- Konstruiere DFA A' mit $\mathcal{L}(A') = \overline{L}$ durch Umbauen von A.
- A' akzeptiert genau dann, wenn A **nicht** akzeptiert.

Der Komplementautomat

- Sei $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ vollständiger DFA.
- Sei $A' := (\Sigma, Q, \delta, q_0, (Q - F))$
- Für alle $w \in \Sigma^*$ führt $\delta(q_0, w)$ in beiden DFAs zum gleichen Zustand.

Komplement von regulären Sprachen

Mit anderen Worten:

Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\overline{L} = \Sigma^* - L \in \mathrm{REG}$.

Lemma

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Komplementbildung.

Beweisidee

- Nimm vollständigen DFA A mit $\mathcal{L}(A) = L$.
- Konstruiere DFA A' mit $\mathcal{L}(A') = \overline{L}$ durch Umbauen von A.
- A' akzeptiert genau dann, wenn A **nicht** akzeptiert.

Der Komplementautomat

- Sei $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ vollständiger DFA.
- Sei $A' := (\Sigma, Q, \delta, q_0, (Q - F))$
- Für alle $w \in \Sigma^*$ führt $\delta(q_0, w)$ in beiden DFAs zum gleichen Zustand.
- $\mathcal{L}(A') = \Sigma^* - \mathcal{L}(A) = \overline{\mathcal{L}(A)}$ folgt sofort.

Komplement von regulären Sprachen

Mit anderen Worten:

Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\overline{L} = \Sigma^* - L \in \mathrm{REG}$.

Lemma

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Komplementbildung.

Korollar

Jede kofinite Sprache ist regulär.

Beweisidee

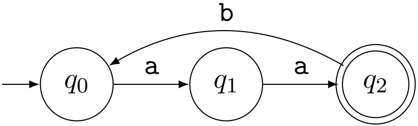
- Nimm vollständigen DFA A mit $\mathcal{L}(A) = L$.
- Konstruiere DFA A' mit $\mathcal{L}(A') = \overline{L}$ durch Umbauen von A.
- A' akzeptiert genau dann, wenn A **nicht** akzeptiert.

Der Komplementautomat

- Sei $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ vollständiger DFA.
- Sei $A' := (\Sigma, Q, \delta, q_0, (Q - F))$
- Für alle $w \in \Sigma^*$ führt $\delta(q_0, w)$ in beiden DFAs zum gleichen Zustand.
- $\mathcal{L}(A') = \Sigma^* - \mathcal{L}(A) = \overline{\mathcal{L}(A)}$ folgt sofort.

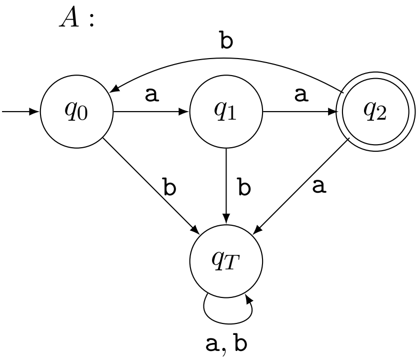
Beispiel für den Komplementautomaten

A :



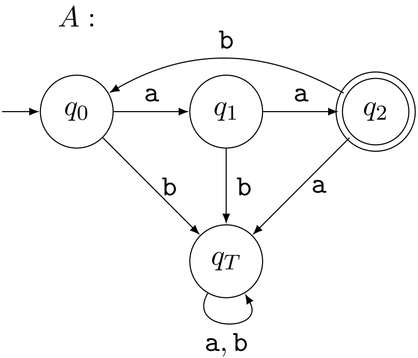
- $\mathcal{L}(A) = \{\texttt{aa}\} \cdot \{\texttt{baa}\}^*$

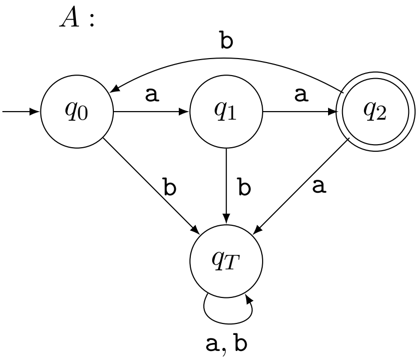
Beispiel für den Komplementautomaten



- $\mathcal{L}(A) = \{\mathtt{aa}\} \cdot \{\mathtt{baa}\}^*$

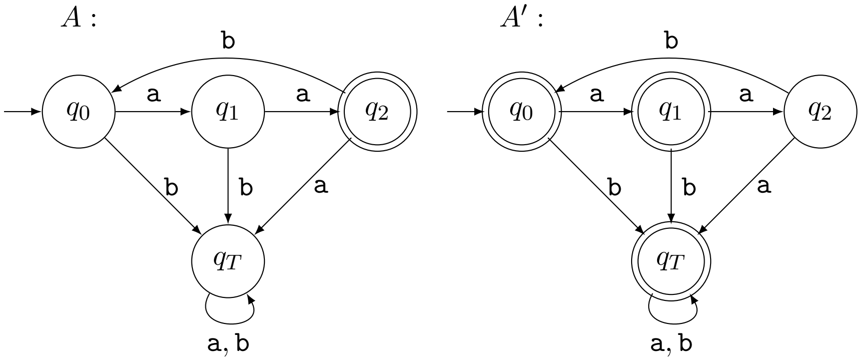
Beispiel für den Komplementautomaten





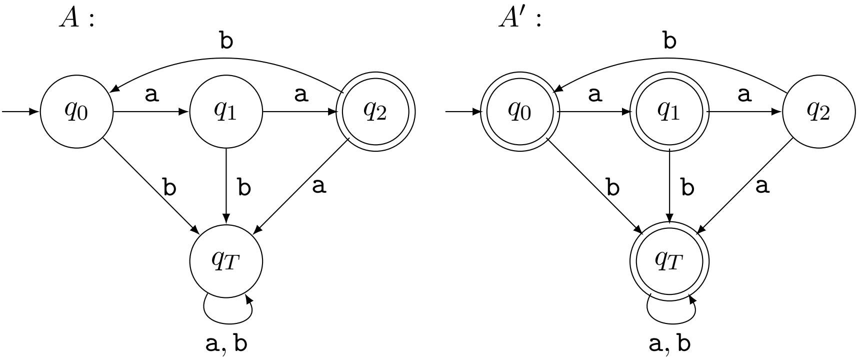
- $\mathcal{L}(A) = \{\mathtt{aa}\} \cdot \{\mathtt{baa}\}^*$

Beispiel für den Komplementautomaten



- $\mathcal{L}(A) = \{\texttt{aa}\} \cdot \{\texttt{baa}\}^*$

Beispiel für den Komplementautomaten



- $\mathcal{L}(A) = \{\mathtt{aa}\} \cdot \{\mathtt{baa}\}^*$
- Es gilt: $\mathcal{L}(A') = \overline{\mathcal{L}(A)}$
- Beachten: A muss vollständig sein!

Schnitt von regulären Sprachen

Lemma

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Schnitt.

Schnitt von regulären Sprachen

Lemma

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Schnitt.

Mit anderen Worten:

Für alle $L_1, L_2 \in \mathrm{REG}$ ist auch $(L_1 \cap L_2) \in \mathrm{REG}$.

Schnitt von regulären Sprachen

Lemma

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Schnitt.

Mit anderen Worten:

Für alle $L_1, L_2 \in \mathrm{REG}$ ist auch $(L_1 \cap L_2) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- Nimm vollständige DFAs A_1, A_2 für L_1, L_2
- Konstruiere DFA A, der A_1 und A_2 gleichzeitig simuliert
- A akzeptiert genau dann, wenn A_1 **und** A_2 akzeptieren.

Der Produktautomat

Die Sprachen L_1, L_2 seien definiert durch die vollständigen DFAs

$$A_1 := (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_{(0,1)}, F_1),$$

$$A_2 := (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_{(0,2)}, F_2)$$

Der Produktautomat

Die Sprachen L_1, L_2 seien definiert durch die vollständigen DFAs

$$A_1 := (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_{(0,1)}, F_1),$$

$$A_2 := (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_{(0,2)}, F_2)$$

Der Produktautomat

Definiere DFA $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q := Q_1 \times Q_2$

Die Sprachen L_1, L_2 seien definiert durch die vollständigen DFAs

$$A_1 := (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_{(0,1)}, F_1),$$
$$A_2 := (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_{(0,2)}, F_2)$$

Der Produktautomat

Definiere DFA $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q := Q_1 \times Q_2$
- $q_0 := (q_{(0,1)}, q_{(0,2)})$

Der Produktautomat

Die Sprachen L_1, L_2 seien definiert durch die vollständigen DFAs

$$A_1 := (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_{(0,1)}, F_1),$$

$$A_2 := (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_{(0,2)}, F_2)$$

Der Produktautomat

Definiere DFA $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q := Q_1 \times Q_2$
- $q_0 := (q_{(0,1)}, q_{(0,2)})$
- $F := F_1 \times F_2$

Der Produktautomat

Die Sprachen L_1, L_2 seien definiert durch die vollständigen DFAs

$$A_1 := (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_{(0,1)}, F_1),$$
$$A_2 := (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_{(0,2)}, F_2)$$

Der Produktautomat

Definiere DFA $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q := Q_1 \times Q_2$
- $q_0 := (q_{(0,1)}, q_{(0,2)})$
- $F := F_1 \times F_2$
- $\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ für alle $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, $a \in \Sigma$

Die Sprachen L_1, L_2 seien definiert durch die vollständigen DFAs

$$A_1 := (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_{(0,1)}, F_1),$$
$$A_2 := (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_{(0,2)}, F_2)$$

Der Produktautomat

Definiere DFA $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q := Q_1 \times Q_2$
- $q_0 := (q_{(0,1)}, q_{(0,2)})$
- $F := F_1 \times F_2$
- $\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ für alle $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, $a \in \Sigma$

Es gilt nach Definition:

$\delta(q_0, w) =$
$(\delta_1(q_{(0,1)}, w), \delta_2(q_{(0,2)}, w))$
für alle $w \in \Sigma^*$

Der Produktautomat

Die Sprachen L_1, L_2 seien definiert durch die vollständigen DFAs

$$A_1 := (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_{(0,1)}, F_1),$$
$$A_2 := (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_{(0,2)}, F_2)$$

Der Produktautomat

Definiere DFA $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q := Q_1 \times Q_2$
- $q_0 := (q_{(0,1)}, q_{(0,2)})$
- $F := F_1 \times F_2$
- $\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ für alle $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, $a \in \Sigma$

Es gilt nach Definition:

$\delta(q_0, w) = (\delta_1(q_{(0,1)}, w), \delta_2(q_{(0,2)}, w))$ für alle $w \in \Sigma^*$

Also gilt:

$w \in \mathcal{L}(A)$ gdw. $w \in (\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{L}(A_2))$

Beispiel für den Produktautomaten (1/2)

Beispielsprachen

Sei

$$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\},$$

$$L_1 := \{\mathtt{a}w \mid w \in \Sigma^*\},$$

$$L_2 := \{w\mathtt{b} \mid w \in \Sigma^*\}.$$

- L_1 ist die Sprache aller Wörter, die mit $\mathtt{a}$ beginnen.
- L_2 ist die Sprache aller Wörter, die auf $\mathtt{b}$ enden.
- L_1 und L_2 sind regulär.

Beispiel für den Produktautomaten (1/2)

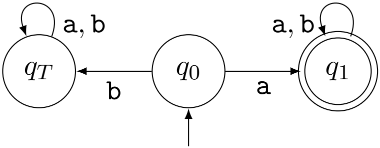
Beispielsprachen

Sei

$$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\},$$
$$L_1 := \{\mathtt{a}w \mid w \in \Sigma^*\},$$
$$L_2 := \{w\mathtt{b} \mid w \in \Sigma^*\}.$$

- L_1 ist die Sprache aller Wörter, die mit a beginnen.
- L_2 ist die Sprache aller Wörter, die auf b enden.
- L_1 und L_2 sind regulär.

A_1:



Beispiel für den Produktautomaten (1/2)

Beispielsprachen

Sei

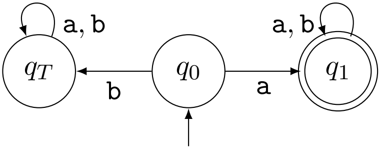
$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$,

$L_1 := \{\mathtt{a}w \mid w \in \Sigma^*\}$,

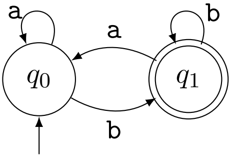
$L_2 := \{w\mathtt{b} \mid w \in \Sigma^*\}$.

- L_1 ist die Sprache aller Wörter, die mit a beginnen.
- L_2 ist die Sprache aller Wörter, die auf b enden.
- L_1 und L_2 sind regulär.

A_1:



A_2:



Beispiel für den Produktautomaten (1/2)

Beispielsprachen

Sei

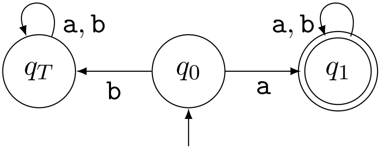
$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$,

$L_1 := \{\mathtt{a}w \mid w \in \Sigma^*\}$,

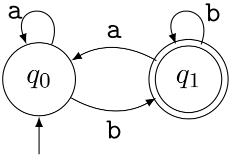
$L_2 := \{w\mathtt{b} \mid w \in \Sigma^*\}$.

- L_1 ist die Sprache aller Wörter, die mit a beginnen.
- L_2 ist die Sprache aller Wörter, die auf b enden.
- L_1 und L_2 sind regulär.

A_1:



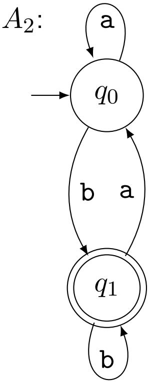
A_2:

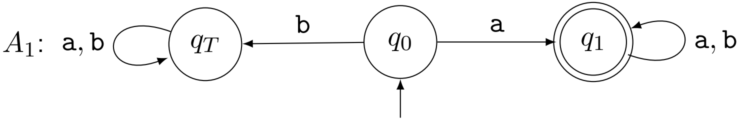


Ziel

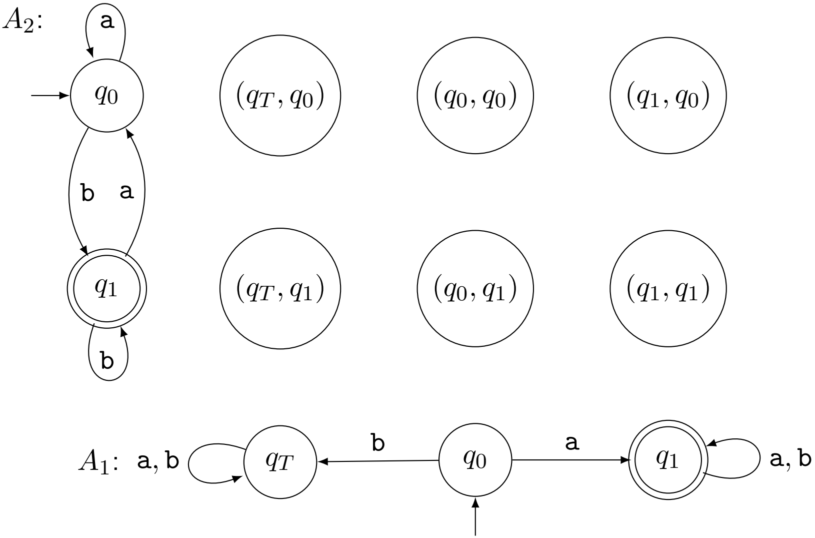
Konstruieren DFA für $\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{L}(A_2)$ mittels Produktautomat.

Beispiel für den Produktautomaten (2/2)

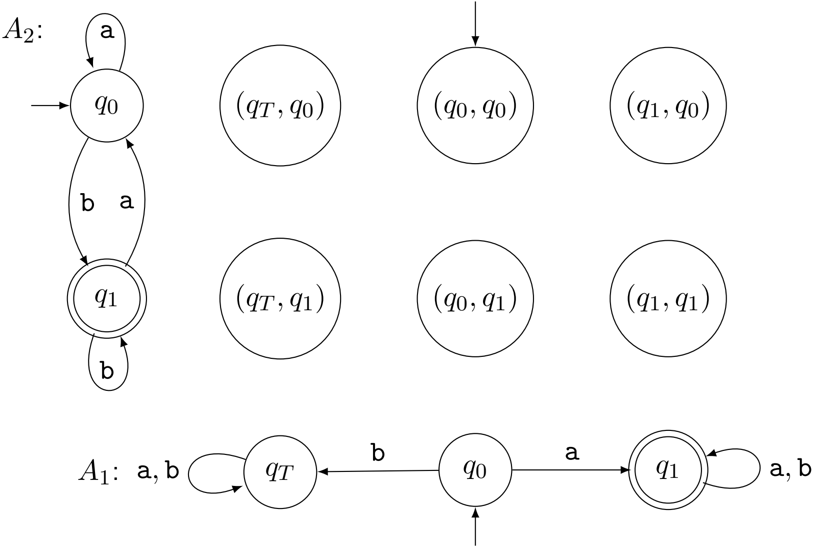




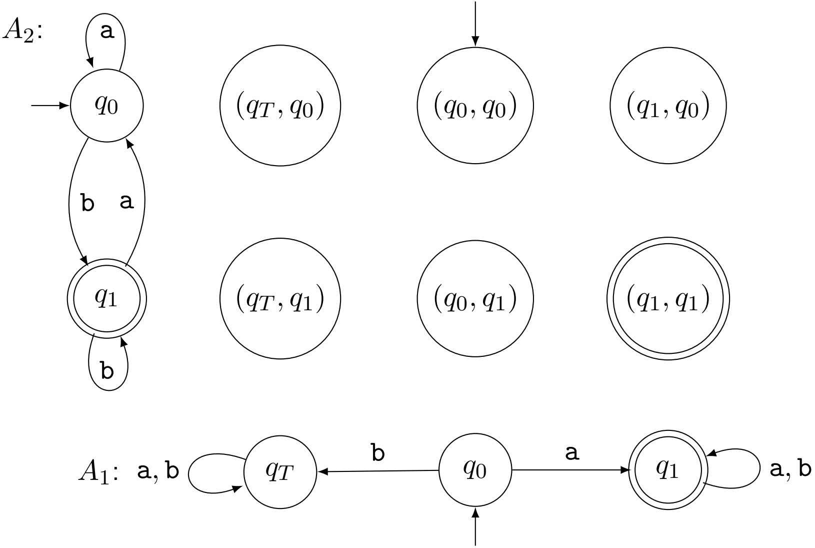
Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



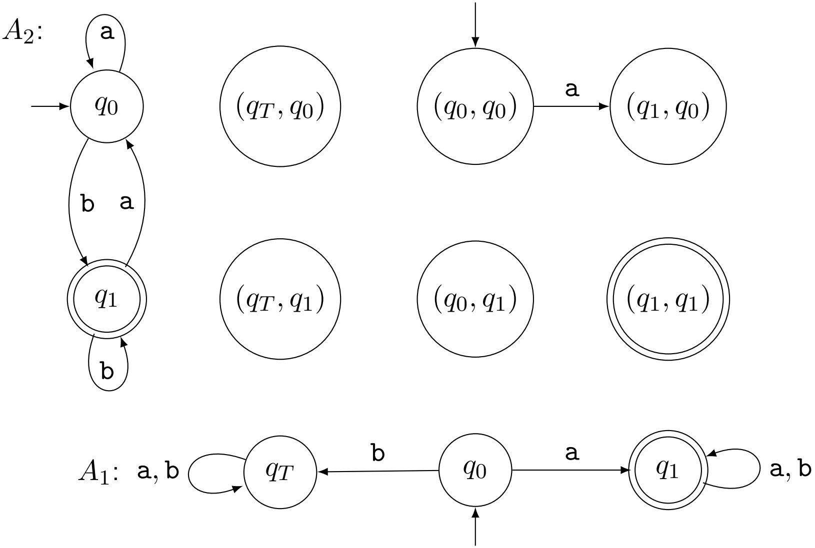
Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



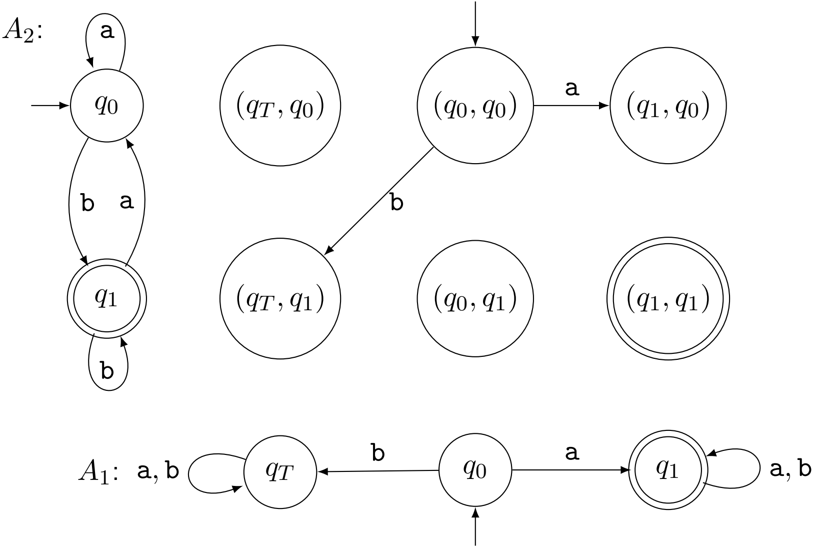
Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



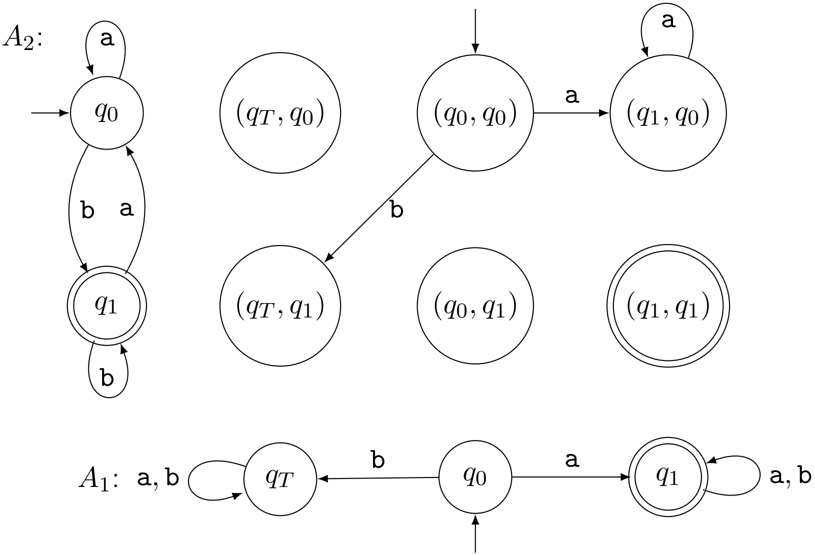
Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



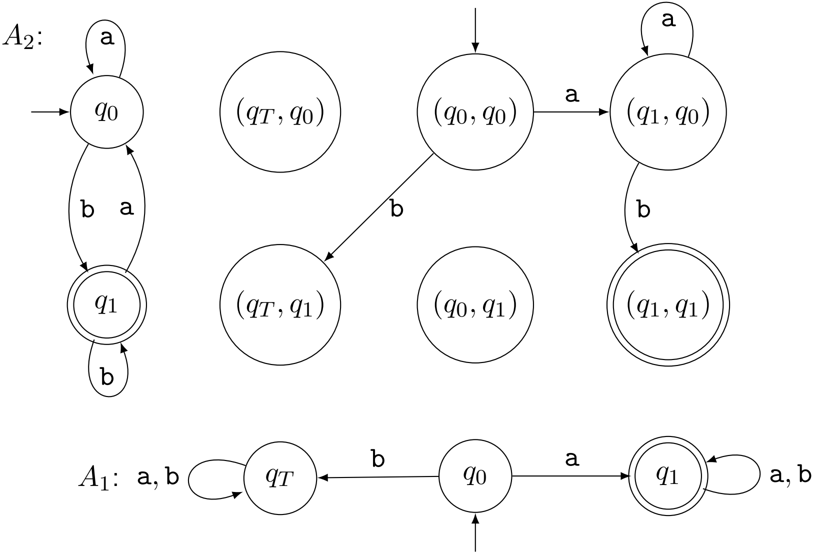
Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



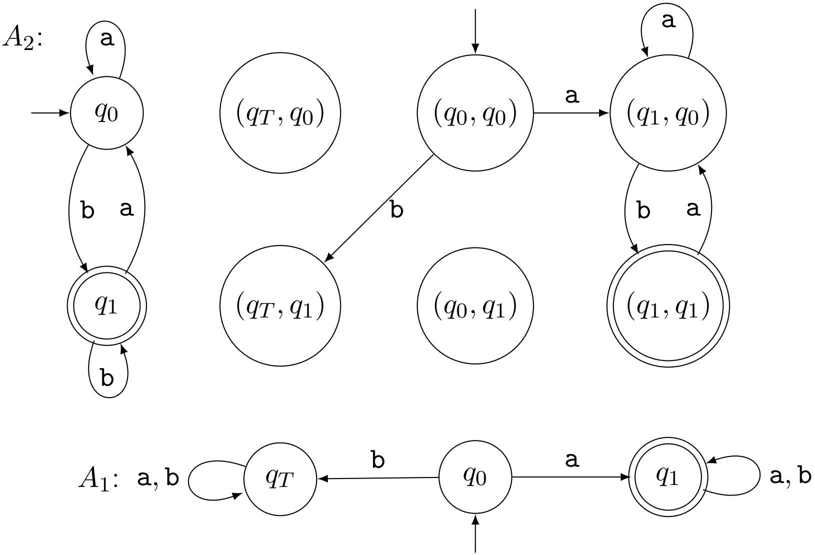
Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



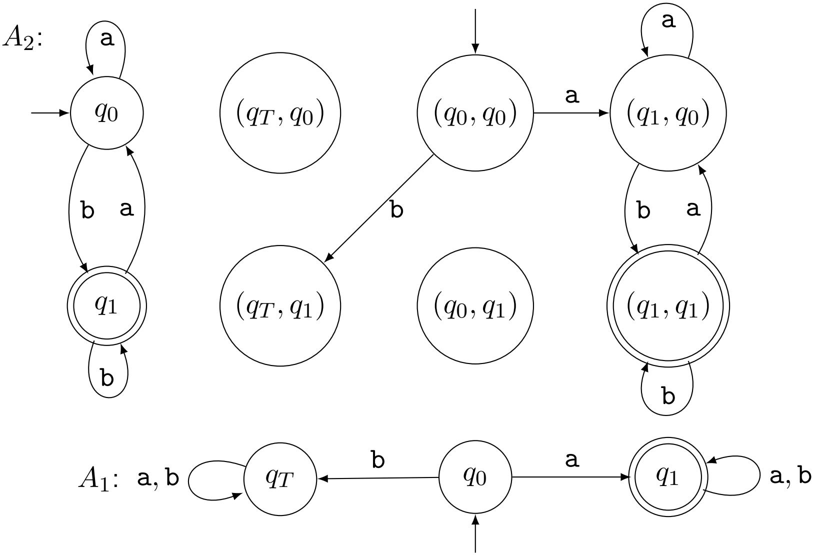
Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



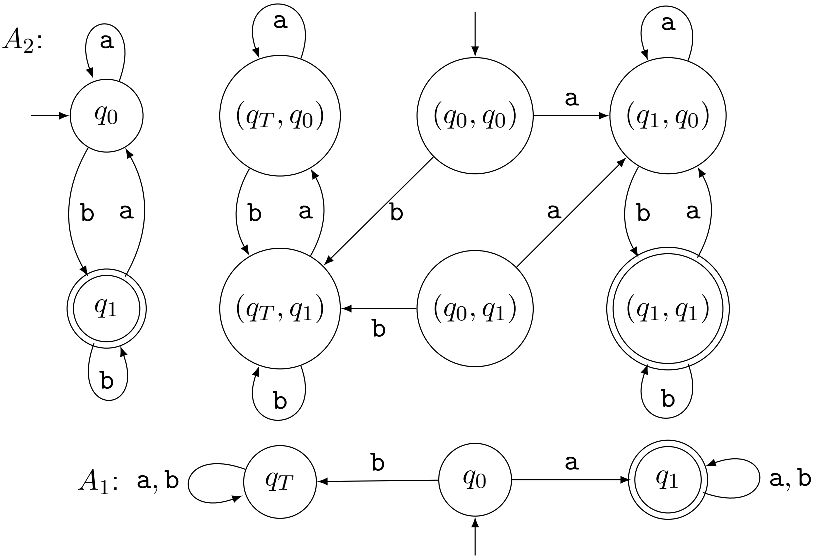
Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



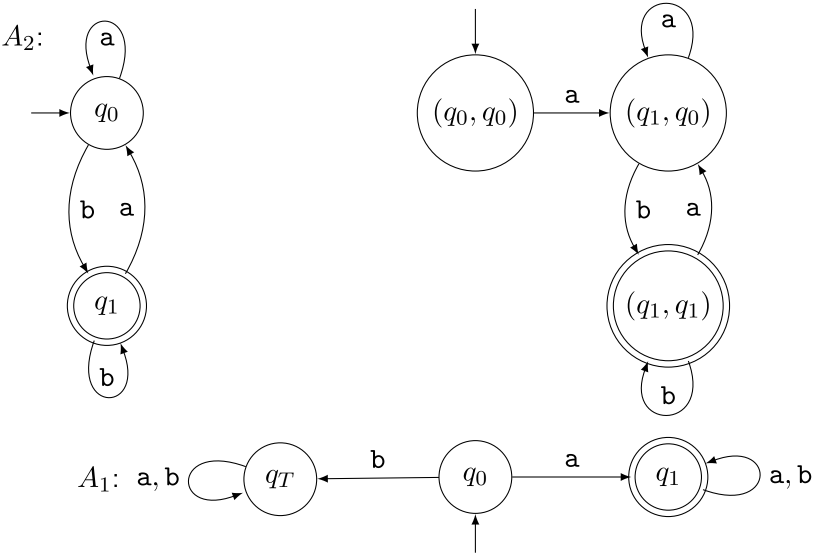
Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



Beispiel für den Produktautomaten (2/2)



Zwei weitere Abschlusseigenschaften

Wir haben gezeigt:

REG ist abgeschlossen unter

- Komplementbildung,
- Schnitt.

Zwei weitere Abschlusseigenschaften

Wir haben gezeigt:

REG ist abgeschlossen unter

- Komplementbildung,
- Schnitt.

Korollar

REG ist abgeschlossen unter

- Vereinigung,
- Mengendifferenz.

Zwei weitere Abschlusseigenschaften

Wir haben gezeigt:

REG ist abgeschlossen unter

- Komplementbildung,
- Schnitt.

Korollar

REG ist abgeschlossen unter

- Vereinigung,
- Mengendifferenz.

Wir können das auf zwei Arten beweisen:

Durch Produktautomaten

Wähle

- $F := (Q_1 \times F_2) \cup (F_1 \times Q_2)$
- $F := F_1 \times (Q_2 - F_2)$

Zwei weitere Abschlusseigenschaften

Wir haben gezeigt:

REG ist abgeschlossen unter

- Komplementbildung,
- Schnitt.

Korollar

REG ist abgeschlossen unter

- Vereinigung,
- Mengendifferenz.

Wir können das auf zwei Arten beweisen:

Durch Produktautomaten

Wähle

- $F := (Q_1 \times F_2) \cup (F_1 \times Q_2)$
- $F := F_1 \times (Q_2 - F_2)$

Durch Abschlusseigenschaften

Es gilt:

- $L_1 \cup L_2 = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{L_2}}$
- $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$

Schöner leben mit Abschlusseigenschaften

Regularitätsbeweise

- $L_1 := \{\texttt{ba}\}^* \cup \{\texttt{c}\}^{327007}$,

Schöner leben mit Abschlusseigenschaften

Regularitätsbeweise

- $L_1 := \{\mathtt{ba}\}^* \cup \{\mathtt{c}\}^{327007}$,
- $L_2 := \{\mathtt{ba}\}^* - \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w| = 2342\}$.

Schöner leben mit Abschlusseigenschaften

Regularitätsbeweise

- $L_1 := \{\texttt{ba}\}^* \cup \{\texttt{c}\}^{327007}$,
- $L_2 := \{\texttt{ba}\}^* - \{w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^* \mid |w| = 2342\}$.

Nicht-Regularitätsbeweise

- $L_3 := \{\texttt{a}^i\texttt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}, i \neq 12345678\}$

Schöner leben mit Abschlusseigenschaften

Regularitätsbeweise

- $L_1 := \{\mathtt{ba}\}^* \cup \{\mathtt{c}\}^{327007}$,
- $L_2 := \{\mathtt{ba}\}^* - \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w| = 2342\}$.

Nicht-Regularitätsbeweise

- $L_3 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}, i \neq 12345678\}$
- $L_4 := \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w|_\mathtt{a} \neq |w|_\mathtt{b}\}$.

Schöner leben mit Abschlusseigenschaften

Regularitätsbeweise

- $L_1 := \{\mathtt{ba}\}^* \cup \{\mathtt{c}\}^{327007}$,
- $L_2 := \{\mathtt{ba}\}^* - \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w| = 2342\}$.

Nicht-Regularitätsbeweise

- $L_3 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}, i \neq 12345678\}$
- $L_4 := \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w|_\mathtt{a} \neq |w|_\mathtt{b}\}$.
- $L := \{b^i a^{j^2} \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Schöner leben mit Abschlusseigenschaften

Regularitätsbeweise

- $L_1 := \{\mathtt{ba}\}^* \cup \{\mathtt{c}\}^{327007}$,
- $L_2 := \{\mathtt{ba}\}^* - \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w| = 2342\}$.

Nicht-Regularitätsbeweise

- $L_3 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}, i \neq 12345678\}$
- $L_4 := \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w|_\mathtt{a} \neq |w|_\mathtt{b}\}$.
- $L := \{b^i a^{j^2} \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Häufiger Fehler

- Sei L beliebige Sprache.
- Bearbeite L mit Abschlusseigenschaften, bis eine reguläre Sprache herauskommt.
- Behaupte: Also ist L regulär. FALSCH!