Teil III

Reguläre Sprachen und endliche Automaten
Teil 3: Die Nerode-Relation

Ableitungen und die Nerode-Relation $\equiv_L$

Ableitung einer Sprache

- Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$, $x \in \Sigma^*$.
- Ableitung von L nach x:

$$D_x L := \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$$

Ableitungen und die Nerode-Relation $\equiv_L$

Ableitung einer Sprache

- Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$, $x \in \Sigma^*$.
- Ableitung von L nach x:

$$D_x L := \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$$

Nerode-Relation

- Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma^*$.
- $x \equiv_L y$ gdw. $D_x L = D_y L$

Ableitungen und die Nerode-Relation $\equiv_L$

Ableitung einer Sprache

- Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$, $x \in \Sigma^*$.
- Ableitung von L nach x:

$$D_x L := \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$$

Nerode-Relation

- Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma^*$.
- $x \equiv_L y$ gdw. $D_x L = D_y L$
- $x \equiv_L y$ gdw. $\forall z \in \Sigma^* : (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$

Ableitungen und die Nerode-Relation $\equiv_L$

Ableitung einer Sprache

- Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$, $x \in \Sigma^*$.
- Ableitung von L nach x:

$$D_x L := \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$$

Nerode-Relation

- Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma^*$.
- $x \equiv_L y$ gdw. $D_x L = D_y L$
- $x \equiv_L y$ gdw. $\forall z \in \Sigma^* : (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$

Äquivalenzklassen von $\equiv_L$

- $\equiv_L$ ist eine Äquivalenzrelation.

Ableitungen und die Nerode-Relation $\equiv_L$

Ableitung einer Sprache

- Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$, $x \in \Sigma^*$.
- Ableitung von L nach x:

$$D_x L := \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$$

Nerode-Relation

- Sei Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma^*$.
- $x \equiv_L y$ gdw. $D_x L = D_y L$
- $x \equiv_L y$ gdw. $\forall z \in \Sigma^* : (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$

Äquivalenzklassen von $\equiv_L$

- $\equiv_L$ ist eine Äquivalenzrelation.
- $[x]_{\equiv_L} := \{y \mid x \equiv_L y\}$ ($[x]$ statt $[x]_{\equiv_L}$ erlaubt)
- $\mathrm{index}(L)$: Anzahl der Äquivalenzklassen von $\equiv_L$

Arbeiten mit Ableitungen und $\equiv_L$

Lemma

Sei Σ Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$.
Für alle $a \in \Sigma$ und alle $x, y \in \Sigma^*$ mit $x \equiv_L y$ gilt:

$$[xa]_{\equiv_L} = [ya]_{\equiv_L}$$

Arbeiten mit Ableitungen und $\equiv_L$

Lemma

Sei Σ Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$.
Für alle $a \in \Sigma$ und alle $x, y \in \Sigma^*$ mit $x \equiv_L y$ gilt:

$$[xa]_{\equiv_L} = [ya]_{\equiv_L}$$

Lemma

- Sei Σ Alphabet, sei $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ vollständiger DFA und sei $L := \mathcal{L}(A)$.
- Für jedes $x \in \Sigma^*$ sei der DFA A_x definiert durch $A_x := (\Sigma, Q, \delta, q_x, F)$, wobei $q_x := \delta(q_0, x)$.
- Für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $D_x L = \mathcal{L}(A_x)$.

Arbeiten mit Ableitungen und $\equiv_L$

Lemma

Sei Σ Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$.
Für alle $a \in \Sigma$ und alle $x, y \in \Sigma^*$ mit $x \equiv_L y$ gilt:

$$[xa]_{\equiv_L} = [ya]_{\equiv_L}$$

Lemma

- Sei Σ Alphabet, sei $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ vollständiger DFA und sei $L := \mathcal{L}(A)$.
- Für jedes $x \in \Sigma^*$ sei der DFA A_x definiert durch $A_x := (\Sigma, Q, \delta, q_x, F)$, wobei $q_x := \delta(q_0, x)$.
- Für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $D_x L = \mathcal{L}(A_x)$.

Korollar

Für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:
Aus $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$ folgt $x \equiv_L y$.

Der Satz von Myhill und Nerode

Myhill-Nerode-Satz

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Dann gilt:

$$L \text{ ist genau dann regulär, wenn } \operatorname{index}(L) \text{ endlich ist.}$$

Der Satz von Myhill und Nerode

Myhill-Nerode-Satz

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Dann gilt:

$$L \text{ ist genau dann regulär, wenn } \mathrm{index}(L) \text{ endlich ist.}$$

Beweisidee

- $\Rightarrow$: Folgt aus Korollar

Der Satz von Myhill und Nerode

Myhill-Nerode-Satz

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Dann gilt:

L ist genau dann regulär, wenn $\mathrm{index}(L)$ endlich ist.

Beweisidee

- $\Rightarrow$: Folgt aus Korollar

Korollar (Wdh.)

Für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:
Aus $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$ folgt $x \equiv_L y$.

Der Satz von Myhill und Nerode

Myhill-Nerode-Satz

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Dann gilt:

L ist genau dann regulär, wenn $\mathrm{index}(L)$ endlich ist.

Beweisidee

- $\Rightarrow$: Folgt aus Korollar
- $\Leftarrow$: Äquivalenzklassenautomat

Korollar (Wdh.)

Für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:
Aus $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$ folgt $x \equiv_L y$.

Der Satz von Myhill und Nerode

Myhill-Nerode-Satz

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Dann gilt:

L ist genau dann regulär, wenn $\mathrm{index}(L)$ endlich ist.

Beweisidee

- $\Rightarrow$: Folgt aus Korollar
- $\Leftarrow$: Äquivalenzklassenautomat

Korollar (Wdh.)

Für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:
Aus $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$ folgt $x \equiv_L y$.

Äquivalenzklassenautomat

Hauptidee: Verwende Äquivalenzklassen von $\equiv_L$ als Zustände eines DFA $A_{\equiv_L}$.

Der Äquivalenzklassenautomat

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ Sprache, für die $\mathrm{index}(L)$ endlich

Der Äquivalenzklassenautomat

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ Sprache, für die $\mathrm{index}(L)$ endlich

Äquivalenzklassenautomat

DFA $A_{\equiv_L} := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit

- $Q := \{[x] \mid x \in \Sigma^*\}$,

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ Sprache, für die $\mathrm{index}(L)$ endlich

Äquivalenzklassenautomat

DFA $A_{\equiv_L} := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit

- $Q := \left\{[x] \mid x \in \Sigma^*\right\}$,
- $q_0 := [\varepsilon]$,

Der Äquivalenzklassenautomat

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ Sprache, für die $\mathrm{index}(L)$ endlich

Äquivalenzklassenautomat

DFA $A_{\equiv_L} := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit

- $Q := \{[x] \mid x \in \Sigma^*\}$,
- $q_0 := [\varepsilon]$,
- $F := \{[x] \mid x \in L\}$,

Der Äquivalenzklassenautomat

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ Sprache, für die $\mathrm{index}(L)$ endlich

Äquivalenzklassenautomat

DFA $A_{\equiv_L} := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit

- $Q := \{[x] \mid x \in \Sigma^*\}$,
- $q_0 := [\varepsilon]$,
- $F := \{[x] \mid x \in L\}$,
- $\delta([x], a) = [xa]$
  für alle $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.

Der Äquivalenzklassenautomat

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ Sprache, für die $\mathrm{index}(L)$ endlich

Äquivalenzklassenautomat

DFA $A_{\equiv_L} := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit

- $Q := \{[x] \mid x \in \Sigma^*\}$,
- $q_0 := [\varepsilon]$,
- $F := \{[x] \mid x \in L\}$,
- $\delta([x], a) = [xa]$
  für alle $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.

Zu zeigen:

- $A_{\equiv_L}$ ist wohldefiniert

Der Äquivalenzklassenautomat

- Sei $L \subseteq \Sigma^*$ Sprache, für die $\operatorname{index}(L)$ endlich

Äquivalenzklassenautomat

DFA $A_{\equiv_L} := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ mit

- $Q := \{[x] \mid x \in \Sigma^*\}$,
- $q_0 := [\varepsilon]$,
- $F := \{[x] \mid x \in L\}$,
- $\delta([x], a) = [xa]$
  für alle $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.

Zu zeigen:

- $A_{\equiv_L}$ ist wohldefiniert
- $\mathcal{L}(A_{\equiv_L}) = L$

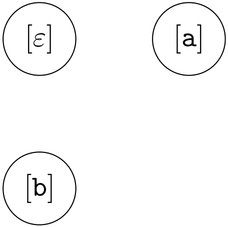
Beispiel für den Äquivalenzklassenautomaten

Beispiel

- $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L := \{\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}\}^*$
- Äquivalenzklassen:
  1. $[\varepsilon] = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \ldots\}$
  2. $[\mathtt{a}] = \{\mathtt{a}, \mathtt{aba}, \ldots\}$
  3. $[\mathtt{b}] = \{\mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \ldots\}$

Beispiel

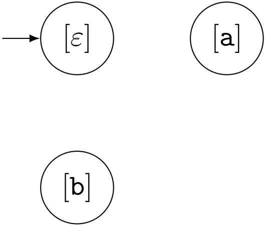
- $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L := \{\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}\}^*$
- Äquivalenzklassen:
  1. $[\varepsilon] = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \ldots\}$
  2. $[\mathtt{a}] = \{\mathtt{a}, \mathtt{aba}, \ldots\}$
  3. $[\mathtt{b}] = \{\mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \ldots\}$



Beispiel für den Äquivalenzklassenautomaten

Beispiel

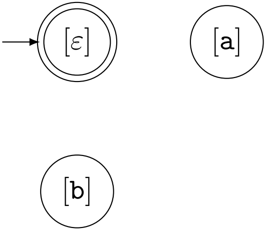
- $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L := \{\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}\}^*$
- Äquivalenzklassen:
  1. $[\varepsilon] = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \ldots\}$
  2. $[\mathtt{a}] = \{\mathtt{a}, \mathtt{aba}, \ldots\}$
  3. $[\mathtt{b}] = \{\mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \ldots\}$



Beispiel für den Äquivalenzklassenautomaten

Beispiel

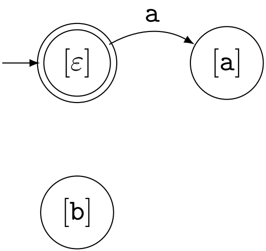
- $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L := \{\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}\}^*$
- Äquivalenzklassen:
  1. $[\varepsilon] = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \ldots\}$
  2. $[\mathtt{a}] = \{\mathtt{a}, \mathtt{aba}, \ldots\}$
  3. $[\mathtt{b}] = \{\mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \ldots\}$



Beispiel für den Äquivalenzklassenautomaten

Beispiel

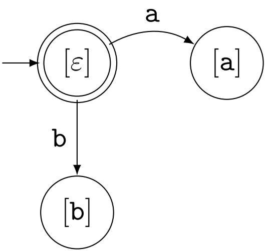
- $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L := \{\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}\}^*$
- Äquivalenzklassen:
  1. $[\varepsilon] = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \ldots\}$
  2. $[\mathtt{a}] = \{\mathtt{a}, \mathtt{aba}, \ldots\}$
  3. $[\mathtt{b}] = \{\mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \ldots\}$



Beispiel für den Äquivalenzklassenautomaten

Beispiel

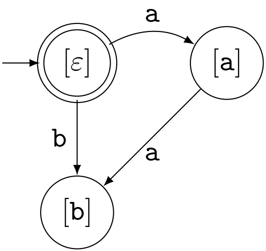
- $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L := \{\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}\}^*$
- Äquivalenzklassen:
  1. $[\varepsilon] = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \ldots\}$
  2. $[\mathtt{a}] = \{\mathtt{a}, \mathtt{aba}, \ldots\}$
  3. $[\mathtt{b}] = \{\mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \ldots\}$



Beispiel für den Äquivalenzklassenautomaten

Beispiel

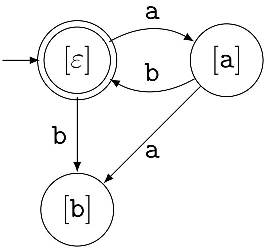
- $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L := \{\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}\}^*$
- Äquivalenzklassen:
  1. $[\varepsilon] = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \ldots\}$
  2. $[\mathtt{a}] = \{\mathtt{a}, \mathtt{aba}, \ldots\}$
  3. $[\mathtt{b}] = \{\mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \ldots\}$



Beispiel für den Äquivalenzklassenautomaten

Beispiel

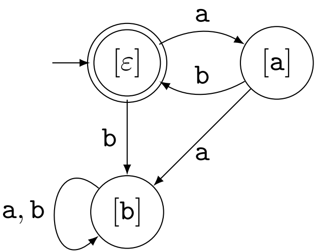
- $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L := \{\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}\}^*$
- Äquivalenzklassen:
  1. $[\varepsilon] = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \ldots\}$
  2. $[\mathtt{a}] = \{\mathtt{a}, \mathtt{aba}, \ldots\}$
  3. $[\mathtt{b}] = \{\mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \ldots\}$



Beispiel für den Äquivalenzklassenautomaten

Beispiel

- $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L := \{\mathtt{a} \cdot \mathtt{b}\}^*$
- Äquivalenzklassen:
  1. $[\varepsilon] = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \ldots\}$
  2. $[\mathtt{a}] = \{\mathtt{a}, \mathtt{aba}, \ldots\}$
  3. $[\mathtt{b}] = \{\mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \ldots\}$



Die Fooling-Set-Methode

Beobachtung

Direkt mit Äquivalenzklassen zu arbeiten ist oft unangenehm frickelig.

Beobachtung

Direkt mit Äquivalenzklassen zu arbeiten ist oft unangenehm frickelig.

Fooling-Set-Lemma

Sei Σ Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$.
Angenommen, es existiert eine unendliche Folge $((x_i, z_i))_{i \in \mathbb{N}}$ über $\Sigma^* \times \Sigma^*$ mit

1. für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $x_i z_i \in L$, und

Die Fooling-Set-Methode

Beobachtung

Direkt mit Äquivalenzklassen zu arbeiten ist oft unangenehm frickelig.

Fooling-Set-Lemma

Sei Σ Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$.
Angenommen, es existiert eine unendliche Folge $((x_i, z_i))_{i \in \mathbb{N}}$ über $\Sigma^* \times \Sigma^*$ mit

1. für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $x_i z_i \in L$, und
2. für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $j \neq i$ ist $x_i z_j \notin L$.

Dann ist L nicht regulär.