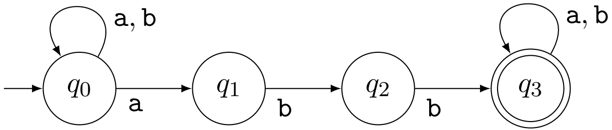
Teil V

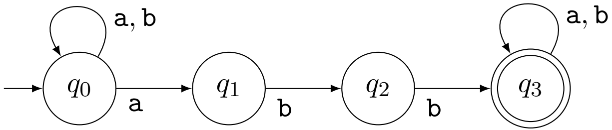
Reguläre Sprachen und endliche Automaten
Teil 5: Nichtdeterminismus

Nichtdeterministische endliche Automaten (NFAs)



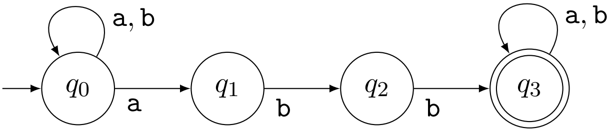
- mehr als eine Kante pro Zustand und Buchstabe erlaubt
- drei Möglichkeiten, sich Funktionsweise zu veranschaulichen:

Nichtdeterministische endliche Automaten (NFAs)



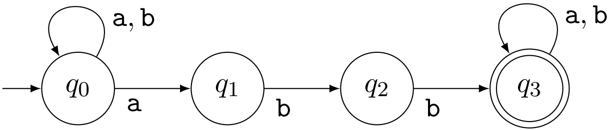
- mehr als eine Kante pro Zustand und Buchstabe erlaubt
- drei Möglichkeiten, sich Funktionsweise zu veranschaulichen:
  1. NFA kann Folgezustand raten

Nichtdeterministische endliche Automaten (NFAs)



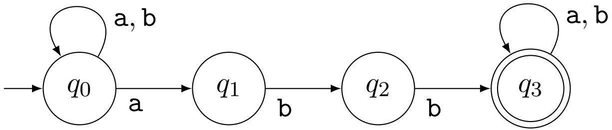
- mehr als eine Kante pro Zustand und Buchstabe erlaubt
- drei Möglichkeiten, sich Funktionsweise zu veranschaulichen:
  1. NFA kann Folgezustand raten
  2. NFA arbeitet parallel

Nichtdeterministische endliche Automaten (NFAs)



- mehr als eine Kante pro Zustand und Buchstabe erlaubt
- drei Möglichkeiten, sich Funktionsweise zu veranschaulichen:
  1. NFA kann Folgezustand raten
  2. NFA arbeitet parallel
  3. NFA ist in mehreren Zuständen gleichzeitig

Nichtdeterministische endliche Automaten (NFAs)



- mehr als eine Kante pro Zustand und Buchstabe erlaubt
- drei Möglichkeiten, sich Funktionsweise zu veranschaulichen:
  1. NFA kann Folgezustand raten
  2. NFA arbeitet parallel
  3. NFA ist in mehreren Zuständen gleichzeitig
- NFA darf Nichtdeterminismus benutzen, muss aber nicht

Nichtdeterministische endliche Automaten (formal)

NFA

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA) A über einem Alphabet Σ wird definiert durch:

1. eine nicht-leere, endliche Menge Q von **Zuständen**,
2. eine Funktion $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ (die **Übergangsrelation**),
3. einen Zustand $q_0 \in Q$ (der **Startzustand**),
4. eine Menge $F \subseteq Q$ von **akzeptierenden Zuständen**.

Wir schreiben dies als $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Nichtdeterministische endliche Automaten (formal)

NFA

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA) A über einem Alphabet Σ wird definiert durch:

1. eine nicht-leere, endliche Menge Q von **Zuständen**,
2. eine Funktion $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ (die **Übergangsrelation**),
3. einen Zustand $q_0 \in Q$ (der **Startzustand**),
4. eine Menge $F \subseteq Q$ von **akzeptierenden Zuständen**.

Wir schreiben dies als $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Erweiterte Übergangsrelation

Erweitere δ zu $\delta : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$:

$$\delta(q, \varepsilon) := \{q\},$$

$$\delta(q, wa) := \bigcup_{p \in \delta(q,w)} \delta(p, a).$$

Nichtdeterministische endliche Automaten (formal)

NFA

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA) A über einem Alphabet Σ wird definiert durch:

1. eine nicht-leere, endliche Menge Q von **Zuständen**,
2. eine Funktion $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ (die **Übergangsrelation**),
3. einen Zustand $q_0 \in Q$ (der **Startzustand**),
4. eine Menge $F \subseteq Q$ von **akzeptierenden Zuständen**.

Wir schreiben dies als $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Erweiterte Übergangsrelation

Erweitere δ zu $\delta : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$:

$$\delta(q, \varepsilon) := \{q\},$$

$$\delta(q, wa) := \bigcup_{p \in \delta(q,w)} \delta(p, a).$$

- NFA ist in mehreren Zuständen gleichzeitig,
- akzeptiert, wenn $\delta(q_0, w)$ mindestens einen Zustand aus F enthält.

Satz

Sei A NFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

NFAs und reguläre Sprachen

Satz

Sei A NFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- konstruiere DFA A_D, der A simuliert
- jeder Zustand von A_D entspricht einer Menge von Zuständen von A

NFAs und reguläre Sprachen

Satz

Sei A NFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- konstruiere DFA A_D, der A simuliert
- jeder Zustand von A_D entspricht einer Menge von Zuständen von A

Potenzmengenkonstruktion

- $Q_D := \mathcal{P}(Q)$

NFAs und reguläre Sprachen

Satz

Sei A NFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- konstruiere DFA A_D, der A simuliert
- jeder Zustand von A_D entspricht einer Menge von Zuständen von A

Potenzmengenkonstruktion

- $Q_D := \mathcal{P}(Q)$
- $q_{0,D} := \{q_0\}$,

NFAs und reguläre Sprachen

Satz

Sei A NFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- konstruiere DFA A_D, der A simuliert
- jeder Zustand von A_D entspricht einer Menge von Zuständen von A

Potenzmengenkonstruktion

- $Q_D := \mathcal{P}(Q)$
- $q_{0,D} := \{q_0\}$,
- $F_D := \{M \in Q_D \mid (M \cap F) \neq \emptyset\}$,
- für $M \in Q_D$ und $a \in \Sigma$ ist

$$\delta_D(M, a) := \bigcup_{q \in M} \delta(q, a).$$

- $A_D := (\Sigma, Q_D, \delta_D, q_{0,D}, F_D)$

NFAs und reguläre Sprachen

Satz

Sei A NFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- konstruiere DFA A_D, der A simuliert
- jeder Zustand von A_D entspricht einer Menge von Zuständen von A

Potenzmengenkonstruktion

- $Q_D := \mathcal{P}(Q)$
- $q_{0,D} := \{q_0\}$,
- $F_D := \{M \in Q_D \mid (M \cap F) \neq \emptyset\}$,
- für $M \in Q_D$ und $a \in \Sigma$ ist

$$\delta_D(M, a) := \bigcup_{q \in M} \delta(q, a).$$

- $A_D := (\Sigma, Q_D, \delta_D, q_{0,D}, F_D)$
- mit dieser Konstruktion kann A_D unerreichbare Zustände enthalten

NFAs und reguläre Sprachen

Satz

Sei A NFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- konstruiere DFA A_D, der A simuliert
- jeder Zustand von A_D entspricht einer Menge von Zuständen von A

Potenzmengenkonstruktion

- $Q_D := \mathcal{P}(Q)$
- $q_{0,D} := \{q_0\}$,
- $F_D := \{M \in Q_D \mid (M \cap F) \neq \emptyset\}$,
- für $M \in Q_D$ und $a \in \Sigma$ ist

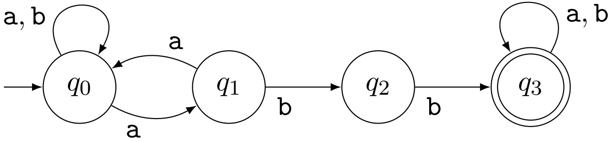
$$\delta_D(M, a) := \bigcup_{q \in M} \delta(q, a).$$

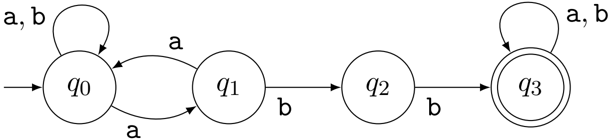
- $A_D := (\Sigma, Q_D, \delta_D, q_{0,D}, F_D)$
- mit dieser Konstruktion kann A_D unerreichbare Zustände enthalten

Idee

Verzichten auf unerreichbare Zustände.

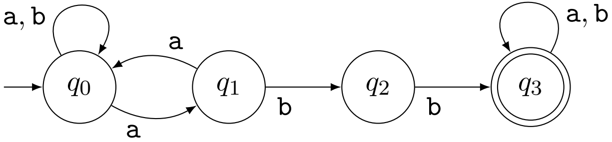
Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)





Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

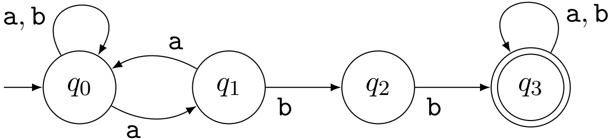


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$		

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

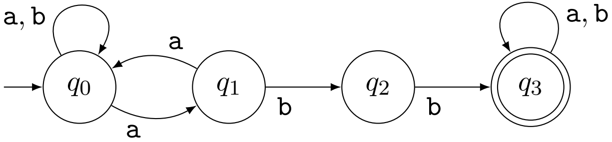


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

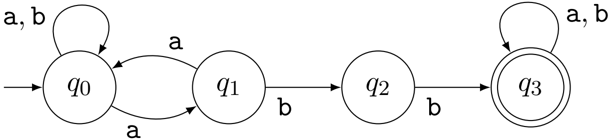


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	
$\{q_0, q_1\}$		

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

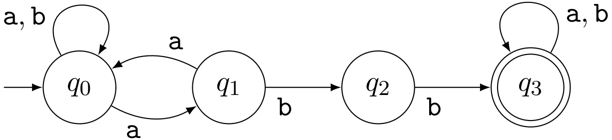


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$		

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

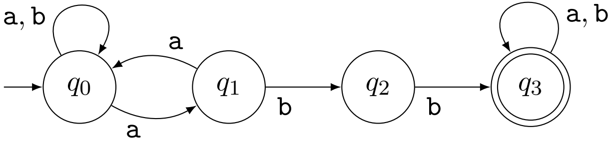


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

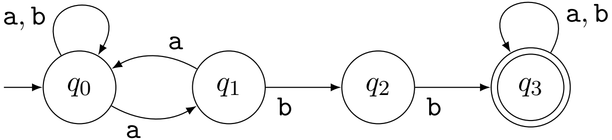


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

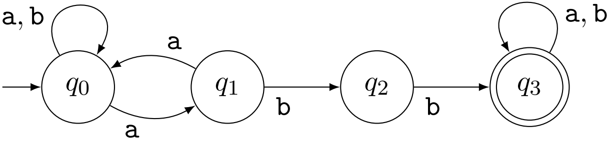


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$		

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

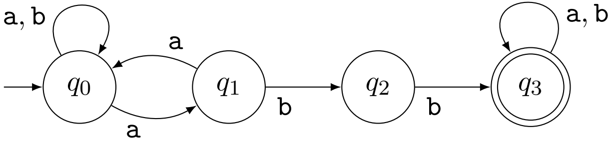


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

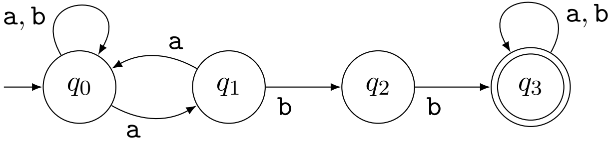


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

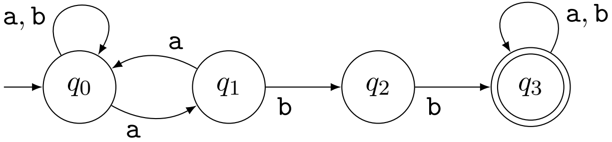


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$		

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

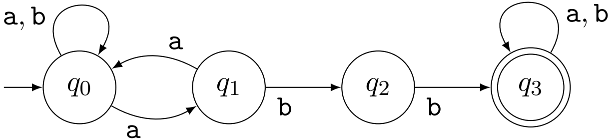


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

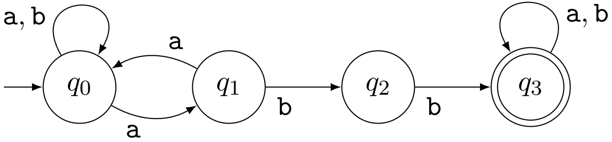


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	
$\{q_0, q_1, q_3\}$		

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

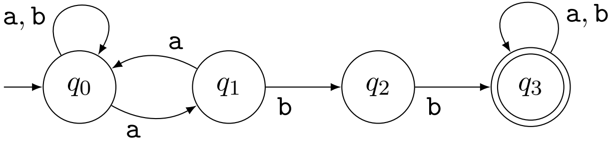


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$		

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

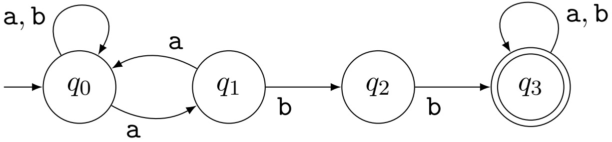


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

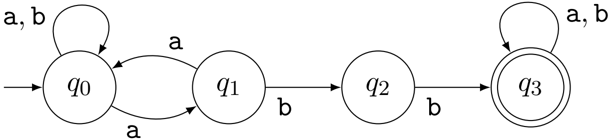


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

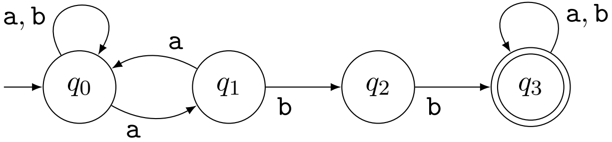


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_2, q_3\}$		

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

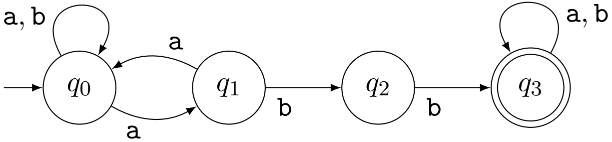


Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	

Potenzmengenkonstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

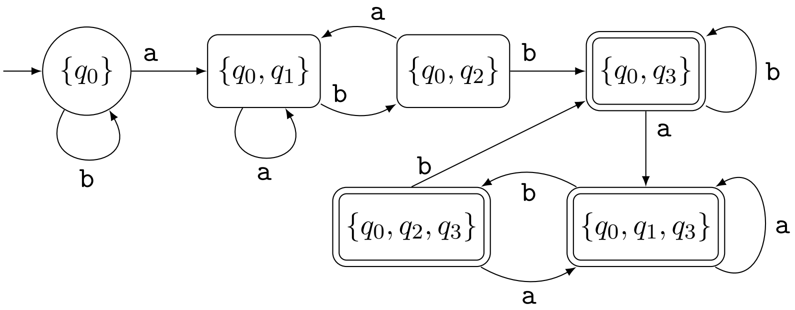


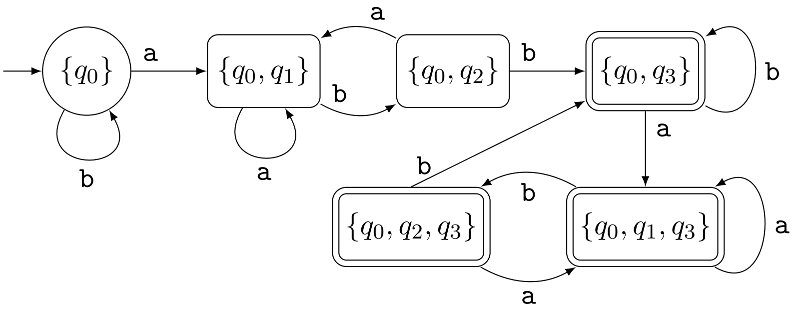
Übergangstabelle

	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$

Potenzmengenkonstruktion (Fortsetzung)

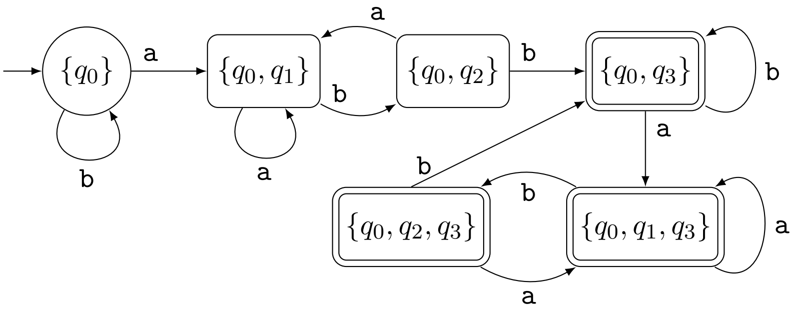




Beobachtungen

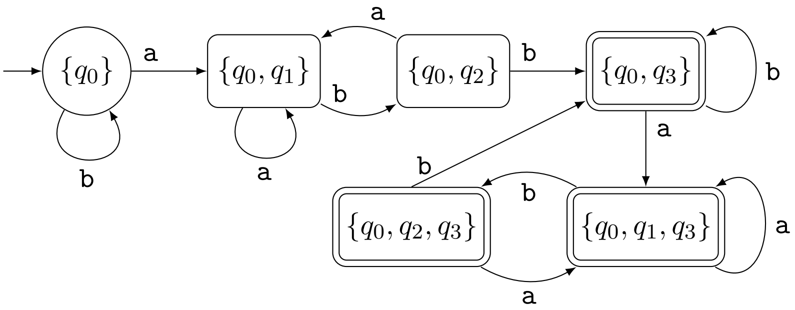
- Alle Zustände sind erreichbar.

Potenzmengenkonstruktion (Fortsetzung)



Beobachtungen

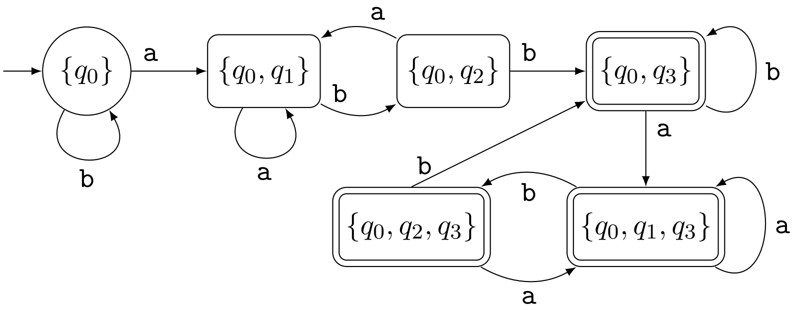
- Alle Zustände sind erreichbar.
- Der konstruierte DFA ist nicht minimal.



Beobachtungen

- Alle Zustände sind erreichbar.
- Der konstruierte DFA ist nicht minimal.
- Nach Minimierung:
  gleiche Größe wie NFA.

Potenzmengenkonstruktion (Fortsetzung)



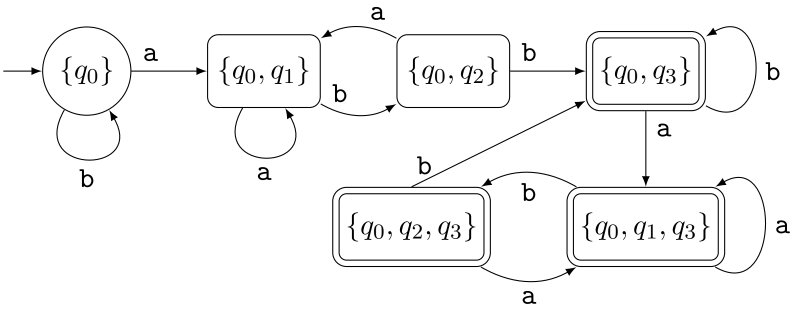
Beobachtungen

- Alle Zustände sind erreichbar.
- Der konstruierte DFA ist nicht minimal.
- Nach Minimierung:
  gleiche Größe wie NFA.

Frage

Gilt das immer?

Potenzmengenkonstruktion (Fortsetzung)



Beobachtungen

- Alle Zustände sind erreichbar.
- Der konstruierte DFA ist nicht minimal.
- Nach Minimierung:
  gleiche Größe wie NFA.

Frage

Gilt das immer?

Antwort

Leider nicht! :-(

Größenunterschiede zwischen NFA und DFA

Korollar (obere Schranke)

Zu jedem NFA A mit n Zuständen existiert ein DFA A_D mit $\mathcal{L}(A_D) = \mathcal{L}(A)$, und A_D hat höchstens 2^n Zustände.

Größenunterschiede zwischen NFA und DFA

Korollar (obere Schranke)

Zu jedem NFA A mit n Zuständen existiert ein DFA A_D mit $\mathcal{L}(A_D) = \mathcal{L}(A)$, und A_D hat höchstens 2^n Zustände.

Lemma (untere Schranke)

Zu jedem $n \geq 2$ existiert ein NFA A_n mit $n+1$ Zuständen, und jeder DFA $A_{n,D}$ mit $\mathcal{L}(A_{n,D}) = \mathcal{L}(A_n)$ hat mindestens 2^n Zustände.

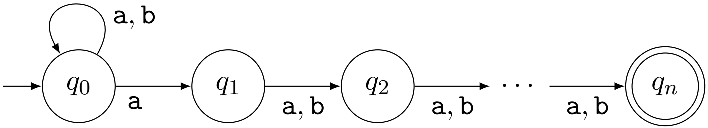
Größenunterschiede zwischen NFA und DFA

Korollar (obere Schranke)

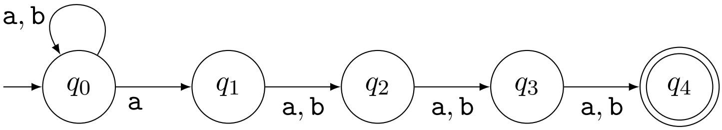
Zu jedem NFA A mit n Zuständen existiert ein DFA A_D mit $\mathcal{L}(A_D) = \mathcal{L}(A)$, und A_D hat höchstens 2^n Zustände.

Lemma (untere Schranke)

Zu jedem $n \geq 2$ existiert ein NFA A_n mit $n+1$ Zuständen, und jeder DFA $A_{n,D}$ mit $\mathcal{L}(A_{n,D}) = \mathcal{L}(A_n)$ hat mindestens 2^n Zustände.

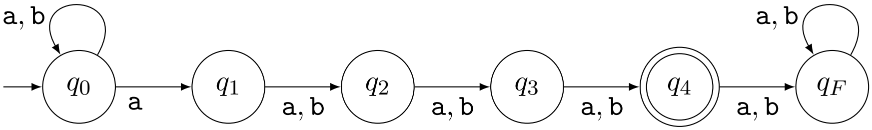


Wir betrachten den folgenden NFA A über $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$:



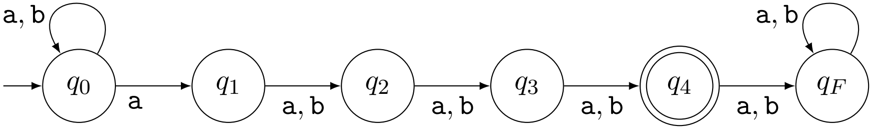
Komplementierung von NFAs

Wir betrachten den folgenden NFA A über $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$:

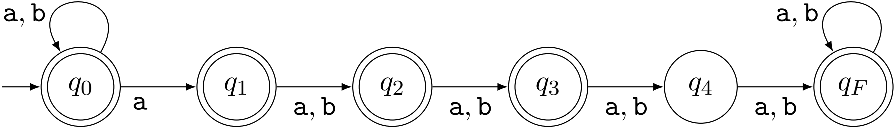


Komplementierung von NFAs

Wir betrachten den folgenden NFA A über $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$:

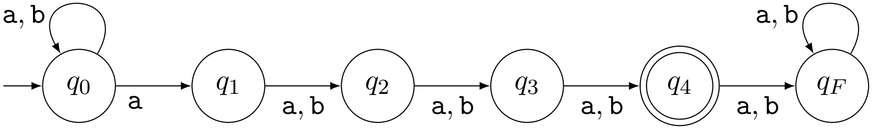


Potentieller NFA für Komplement von $\mathcal{L}(A)$:

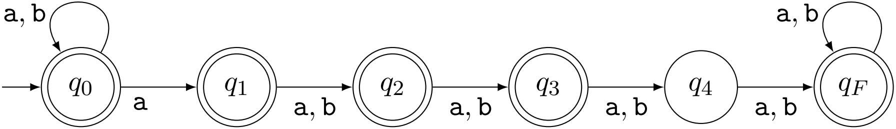


Komplementierung von NFAs ist schwer(er als bei DFAs)

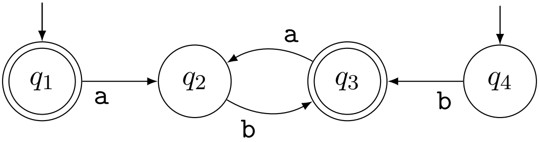
Wir betrachten den folgenden NFA A über $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$:



Potentieller NFA für Komplement von $\mathcal{L}(A)$: Klappt nicht!



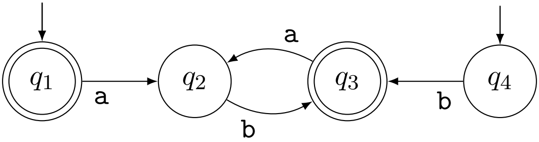
Nichtdeterministische Startzustände



NFA mit nichtdeterministischem Startzustand (NNFA)

- kann in mehreren Zuständen gleichzeitig starten
  oder:
- kann Startzustand raten

Nichtdeterministische Startzustände



NFA mit nichtdeterministischem Startzustand (NNFA)

- kann in mehreren Zuständen gleichzeitig starten
  oder:
- kann Startzustand raten

Formal

Definiert wie NFA, aber $Q_0 \subseteq Q$ statt $q_0 \in Q$.

Ausdrucksstärke von NNFAs

Satz

Sei A NNFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Ausdrucksstärke von NNFAs

Satz

Sei A NNFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- modifizierte Potenzmengenkonstruktion
- $q_{0,D} := Q_0$

Ausdrucksstärke von NNFAs

Satz

Sei A NNFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- modifizierte Potenzmengenkonstruktion
- $q_{0,D} := Q_0$

Reversal-Operator

- Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$.
- $(a_1 \cdots a_n)^R := (a_n \cdots a_1)$
- $L^R := \{w^R \mid w \in L\}$

Ausdrucksstärke von NNFAs

Satz

Sei A NNFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- modifizierte Potenzmengenkonstruktion
- $q_{0,D} := Q_0$

Reversal-Operator

- Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$.
- $(a_1 \cdots a_n)^R := (a_n \cdots a_1)$
- $L^R := \{w^R \mid w \in L\}$

Lemma

REG ist abgegeschlossen unter dem Reversal-Operator L^R.

Ausdrucksstärke von NNFAs

Satz

Sei A NNFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- modifizierte Potenzmengenkonstruktion
- $q_{0,D} := Q_0$

Reversal-Operator

- Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$.
- $(a_1 \cdots a_n)^R := (a_n \cdots a_1)$
- $L^R := \{w^R \mid w \in L\}$

Lemma

REG ist abgegeschlossen unter dem Reversal-Operator L^R.

Reversal-Konstruktion

Konstruiere aus DFA A einen NNFA A_R mit $\mathcal{L}(A_R) = \mathcal{L}(A)^R$.

Ausdrucksstärke von NNFAs

Satz

Sei A NNFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- modifizierte Potenzmengenkonstruktion
- $q_{0,D} := Q_0$

Reversal-Operator

- Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$.
- $(a_1 \cdots a_n)^R := (a_n \cdots a_1)$
- $L^R := \{w^R \mid w \in L\}$

Lemma

REG ist abgegeschlossen unter dem Reversal-Operator L^R.

Reversal-Konstruktion

Konstruiere aus DFA A einen NNFA A_R mit $\mathcal{L}(A_R) = \mathcal{L}(A)^R$.

- Kanten werden umgedreht

Ausdrucksstärke von NNFAs

Satz

Sei A NNFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- modifizierte Potenzmengenkonstruktion
- $q_{0,D} := Q_0$

Reversal-Operator

- Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$.
- $(a_1 \cdots a_n)^R := (a_n \cdots a_1)$
- $L^R := \{w^R \mid w \in L\}$

Lemma

REG ist abgegeschlossen unter dem Reversal-Operator L^R.

Reversal-Konstruktion

Konstruiere aus DFA A einen NNFA A_R mit $\mathcal{L}(A_R) = \mathcal{L}(A)^R$.

- Kanten werden umgedreht
- Startzustand wird akzeptierender Zustand

Ausdrucksstärke von NNFAs

Satz

Sei A NNFA. Dann gilt: $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{REG}$.

Beweisidee

- modifizierte Potenzmengenkonstruktion
- $q_{0,D} := Q_0$

Reversal-Operator

- Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$.
- $(a_1 \cdots a_n)^R := (a_n \cdots a_1)$
- $L^R := \{w^R \mid w \in L\}$

Lemma

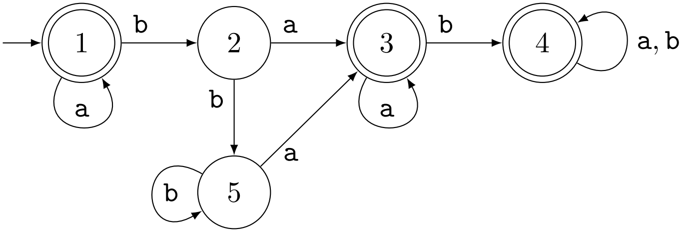
REG ist abgegeschlossen unter dem Reversal-Operator L^R.

Reversal-Konstruktion

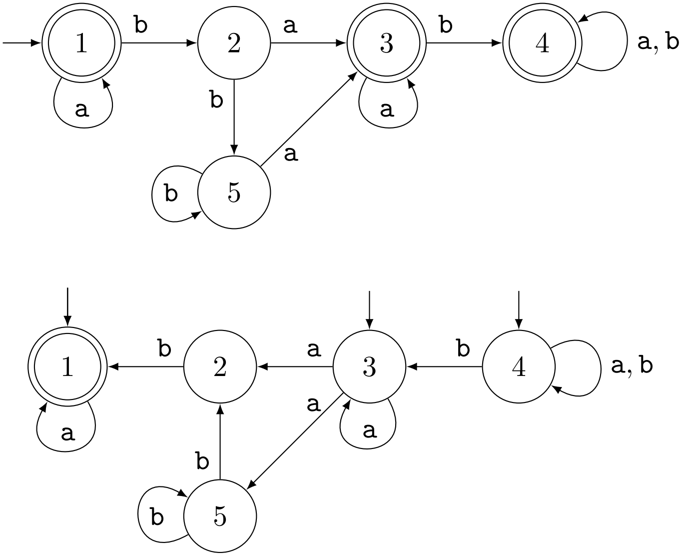
Konstruiere aus DFA A einen NNFA A_R mit $\mathcal{L}(A_R) = \mathcal{L}(A)^R$.

- Kanten werden umgedreht
- Startzustand wird akzeptierender Zustand
- akzeptierende Zustände werden Startzustände

Beispiel für die Reversal-Konstruktion



Beispiel für die Reversal-Konstruktion



Brzozowskis Algorithmus

- `rev` bezeichne die Reversal-Konstruktion
- `pot` bezeichne die Potenzmengen-Konstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

Brzozowskis Algorithmus

- `rev` bezeichne die Reversal-Konstruktion
- `pot` bezeichne die Potenzmengen-Konstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

Brzozowskis Algorithmus

Sei A ein DFA. Sei

$$A_M :=$$

Brzozowskis Algorithmus

- $\texttt{rev}$ bezeichne die Reversal-Konstruktion
- $\texttt{pot}$ bezeichne die Potenzmengen-Konstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

Brzozowskis Algorithmus

Sei A ein DFA. Sei

$$A_M := \qquad\qquad \texttt{rev}(A)$$

Brzozowskis Algorithmus

- $\texttt{rev}$ bezeichne die Reversal-Konstruktion
- $\texttt{pot}$ bezeichne die Potenzmengen-Konstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

Brzozowskis Algorithmus

Sei A ein DFA. Sei

$$A_M := \qquad \texttt{pot}(\texttt{rev}(A))$$

Brzozowskis Algorithmus

- `rev` bezeichne die Reversal-Konstruktion
- `pot` bezeichne die Potenzmengen-Konstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

Brzozowskis Algorithmus

Sei A ein DFA. Sei

$$A_M := \quad \texttt{rev}(\texttt{pot}(\texttt{rev}(A)))$$

Brzozowskis Algorithmus

- $\texttt{rev}$ bezeichne die Reversal-Konstruktion
- $\texttt{pot}$ bezeichne die Potenzmengen-Konstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

Brzozowskis Algorithmus

Sei A ein DFA. Sei

$$A_M := \texttt{pot}(\texttt{rev}(\texttt{pot}(\texttt{rev}(A))))$$

Brzozowskis Algorithmus zur DFA-Minimierung

- $\texttt{rev}$ bezeichne die Reversal-Konstruktion
- $\texttt{pot}$ bezeichne die Potenzmengen-Konstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

Brzozowskis Algorithmus

Sei A ein DFA. Sei

$$A_M := \texttt{pot}(\texttt{rev}(\texttt{pot}(\texttt{rev}(A))))$$

Dann ist A_M minimaler DFA für $\mathcal{L}(A)$.

Brzozowskis Algorithmus zur DFA-Minimierung

- $\texttt{rev}$ bezeichne die Reversal-Konstruktion
- $\texttt{pot}$ bezeichne die Potenzmengen-Konstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

Brzozowskis Algorithmus

Sei A ein DFA. Sei

$$A_M := \texttt{pot}(\texttt{rev}(\texttt{pot}(\texttt{rev}(A))))$$

Dann ist A_M minimaler DFA für $\mathcal{L}(A)$.

Beweis durch folgendes Lemma:

Sei A ein vollständiger DFA, in dem jeder Zustand erreichbar ist. Dann ist $\texttt{pot}(\texttt{rev}(A))$ ein minimaler DFA für die Sprache $\mathcal{L}(A)^R$.

Brzozowskis Algorithmus zur DFA-Minimierung

- $\texttt{rev}$ bezeichne die Reversal-Konstruktion
- $\texttt{pot}$ bezeichne die Potenzmengen-Konstruktion (ohne unerreichbare Zustände)

Brzozowskis Algorithmus

Sei A ein DFA. Sei

$$A_M := \texttt{pot}(\texttt{rev}(\texttt{pot}(\texttt{rev}(A))))$$

Dann ist A_M minimaler DFA für $\mathcal{L}(A)$.

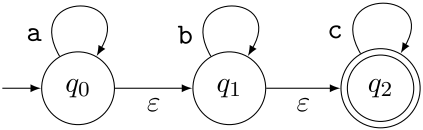
Beweis durch folgendes Lemma:

Sei A ein vollständiger DFA, in dem jeder Zustand erreichbar ist. Dann ist $\texttt{pot}(\texttt{rev}(A))$ ein minimaler DFA für die Sprache $\mathcal{L}(A)^R$.

Vorsicht

Im worst case hat der Algorithmus exponentielle Laufzeit.

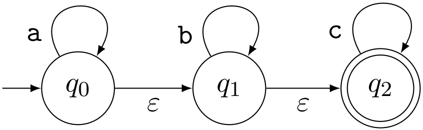
Ausblick: ε-NFA



NFA mit ε-Übergängen (ε-NFA)

- kann Abkürzungen benutzen, die keinen Buchstaben verbrauchen

Ausblick: ε-NFA

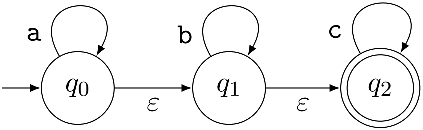


NFA mit ε-Übergängen (ε-NFA)

- kann Abkürzungen benutzen, die keinen Buchstaben verbrauchen

$$\varepsilon\text{-ABSCHLUSS}(q) := \{p \in Q \mid p \text{ ist von } q \text{ aus durch } \varepsilon\text{-Übergänge zu erreichen}\}.$$

Ausblick: ε-NFA



$$\varepsilon\text{-ABSCHLUSS}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\},$$
$$\varepsilon\text{-ABSCHLUSS}(q_1) = \{q_1, q_2\},$$
$$\varepsilon\text{-ABSCHLUSS}(q_2) = \{q_2\}.$$

NFA mit ε-Übergängen (ε-NFA)

- kann Abkürzungen benutzen, die keinen Buchstaben verbrauchen

$\varepsilon\text{-ABSCHLUSS}(q) := \{p \in Q \mid p$ ist von q aus durch ε-Übergänge zu erreichen$\}$.