Teil III

Reguläre Sprachen und endliche Automaten
Teil 7: Entscheidungsprobleme und Grammatiken

Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

Entscheidungsprobleme

Seien X, Y endliche Automaten oder reguläre Ausdrücke.

Entscheidungsprobleme

Seien X, Y endliche Automaten oder reguläre Ausdrücke.

- Wortproblem: Ist $w \in \mathcal{L}(X)$?

Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

Entscheidungsprobleme

Seien X, Y endliche Automaten oder reguläre Ausdrücke.

- Wortproblem: Ist $w \in \mathcal{L}(X)$?
- Leerheitsproblem: Ist $\mathcal{L}(X) = \emptyset$?

Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

Entscheidungsprobleme

Seien X, Y endliche Automaten oder reguläre Ausdrücke.

- Wortproblem: Ist $w \in \mathcal{L}(X)$?
- Leerheitsproblem: Ist $\mathcal{L}(X) = \emptyset$?
- Universalitätsproblem: Ist $\mathcal{L}(X) = \Sigma^*$?

Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

Entscheidungsprobleme

Seien X, Y endliche Automaten oder reguläre Ausdrücke.

- Wortproblem: Ist $w \in \mathcal{L}(X)$?
- Leerheitsproblem: Ist $\mathcal{L}(X) = \emptyset$?
- Universalitätsproblem: Ist $\mathcal{L}(X) = \Sigma^*$?
- Inklusionsproblem: Ist $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y)$?

Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

Entscheidungsprobleme

Seien X, Y endliche Automaten oder reguläre Ausdrücke.

- Wortproblem: Ist $w \in \mathcal{L}(X)$?
- Leerheitsproblem: Ist $\mathcal{L}(X) = \emptyset$?
- Universalitätsproblem: Ist $\mathcal{L}(X) = \Sigma^*$?
- Inklusionsproblem: Ist $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y)$?
- Äquivalenzproblem: Ist $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$?

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,
3. eine Variable $S \in V$ (dem **Startsymbol**).

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,
3. eine Variable $S \in V$ (dem **Startsymbol**).

- $G := (\Sigma, V, P, S)$

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,
3. eine Variable $S \in V$ (dem **Startsymbol**).

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- statt $(\alpha, \beta) \in P$ auch $\alpha \to \beta$,

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,
3. eine Variable $S \in V$ (dem **Startsymbol**).

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- statt $(\alpha, \beta) \in P$ auch $\alpha \to \beta$,
- alle Regeln haben Form $A \to \varepsilon$,

  $A \to bC$,

  $(A, C \in V; b \in \Sigma)$.

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,
3. eine Variable $S \in V$ (dem **Startsymbol**).

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- statt $(\alpha, \beta) \in P$ auch $\alpha \to \beta$,
- alle Regeln haben Form $A \to \varepsilon$, $A \to bC$, $(A, C \in V; b \in \Sigma)$.

- **Satzform:** Wort über $\Sigma \cup V$

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,
3. eine Variable $S \in V$ (dem **Startsymbol**).

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- statt $(\alpha, \beta) \in P$ auch $\alpha \to \beta$,
- alle Regeln haben Form $A \to \varepsilon,$
  $A \to bC,$
  $(A, C \in V; b \in \Sigma)$.

- **Satzform:** Wort über $\Sigma \cup V$
- $\alpha \Rightarrow_G \beta$:
  $\alpha = \alpha_1 \cdot A \cdot \alpha_2,\ \beta = \alpha_1 \cdot \gamma \cdot \alpha_2,\ (A, \gamma) \in P,$

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,
3. eine Variable $S \in V$ (dem **Startsymbol**).

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- statt $(\alpha, \beta) \in P$ auch $\alpha \to \beta$,
- alle Regeln haben Form $A \to \varepsilon$, $A \to bC$, $(A, C \in V; b \in \Sigma)$.

- **Satzform:** Wort über $\Sigma \cup V$
- $\alpha \Rightarrow_G \beta$: $\alpha = \alpha_1 \cdot A \cdot \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \cdot \gamma \cdot \alpha_2$, $(A, \gamma) \in P$,
- $\alpha \Rightarrow_G^0 \beta$ gdw. $\beta = \alpha$,

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,
3. eine Variable $S \in V$ (dem **Startsymbol**).

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- statt $(\alpha, \beta) \in P$ auch $\alpha \to \beta$,
- alle Regeln haben Form $A \to \varepsilon$, $A \to bC$, $(A, C \in V; b \in \Sigma)$.

- **Satzform:** Wort über $\Sigma \cup V$
- $\alpha \Rightarrow_G \beta$: $\alpha = \alpha_1 \cdot A \cdot \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \cdot \gamma \cdot \alpha_2$, $(A, \gamma) \in P$,
- $\alpha \Rightarrow_G^0 \beta$ gdw. $\beta = \alpha$,
- $\alpha \Rightarrow_G^{n+1} \beta$ gdw. $\alpha \Rightarrow_G^n \gamma \Rightarrow_G \beta$,

Reguläre Grammatiken

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,
3. eine Variable $S \in V$ (dem **Startsymbol**).

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- statt $(\alpha, \beta) \in P$ auch $\alpha \to \beta$,
- alle Regeln haben Form $A \to \varepsilon$,
  $A \to bC$,
  $(A, C \in V; b \in \Sigma)$.

- **Satzform:** Wort über $\Sigma \cup V$
- $\alpha \Rightarrow_G \beta$:
  $\alpha = \alpha_1 \cdot A \cdot \alpha_2,\ \beta = \alpha_1 \cdot \gamma \cdot \alpha_2,\ (A, \gamma) \in P$,
- $\alpha \Rightarrow_G^0 \beta$ gdw. $\beta = \alpha$,
- $\alpha \Rightarrow_G^{n+1} \beta$ gdw. $\alpha \Rightarrow_G^n \gamma \Rightarrow_G \beta$,
- $\alpha \Rightarrow_G^* \beta$ gdw. $\alpha \Rightarrow_G^n \beta$ für ein n,

Reguläre Grammatik

Eine **reguläre Grammatik** G über einem Alphabet Σ wird definiert durch

1. ein Alphabet V von **Variablen**, wobei $(\Sigma \cap V) = \emptyset$,
2. eine Menge $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup (\Sigma \cdot V))$ von **Regeln**,
3. eine Variable $S \in V$ (dem **Startsymbol**).

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- statt $(\alpha, \beta) \in P$ auch $\alpha \to \beta$,
- alle Regeln haben Form $A \to \varepsilon$,
  $A \to bC$,
  $(A, C \in V; b \in \Sigma)$.

- **Satzform:** Wort über $\Sigma \cup V$
- $\alpha \Rightarrow_G \beta$:
  $\alpha = \alpha_1 \cdot A \cdot \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \cdot \gamma \cdot \alpha_2$, $(A, \gamma) \in P$,
- $\alpha \Rightarrow_G^0 \beta$ gdw. $\beta = \alpha$,
- $\alpha \Rightarrow_G^{n+1} \beta$ gdw. $\alpha \Rightarrow_G^n \gamma \Rightarrow_G \beta$,
- $\alpha \Rightarrow_G^* \beta$ gdw. $\alpha \Rightarrow_G^n \beta$ für ein n,
- $\mathcal{L}(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$.

Reguläre Grammatiken und reguläre Sprachen

Satz

L ist genau dann regulär, wenn eine reguläre Grammatik G existiert, für die $\mathcal{L}(G) = L$.

Reguläre Grammatiken und reguläre Sprachen

Satz

L ist genau dann regulär, wenn eine reguläre Grammatik G existiert, für die $\mathcal{L}(G) = L$.

Beweisidee

Reguläre Grammatiken sind eigentlich eine andere Schreibweise für NFAs.

Reguläre Grammatiken und reguläre Sprachen

Satz

L ist genau dann regulär, wenn eine reguläre Grammatik G existiert, für die $\mathcal{L}(G) = L$.

Beweisidee

Reguläre Grammatiken sind eigentlich eine andere Schreibweise für NFAs.

Rechtslineare Grammatik

- Erweiterung der regulären Grammatiken
- Regeln der Form
  - $A \to w$,
  - $A \to w \cdot B$

  $(A, B \in V, w \in \Sigma^*)$.

Reguläre Grammatiken und reguläre Sprachen

Satz

L ist genau dann regulär, wenn eine reguläre Grammatik G existiert, für die $\mathcal{L}(G) = L$.

Beweisidee

Reguläre Grammatiken sind eigentlich eine andere Schreibweise für NFAs.

Rechtslineare Grammatik

- Erweiterung der regulären Grammatiken
- Regeln der Form
  - $A \to w$,
  - $A \to w \cdot B$

  $(A, B \in V, w \in \Sigma^*)$.

Satz

L ist genau dann regulär, wenn eine rechtslineare Grammatik G existiert, für die $\mathcal{L}(G) = L$.