Teil III

Reguläre Sprachen und endliche Automaten

DFA

Ein deterministischer endlicher Automat (DFA) A über einem Alphabet Σ wird definiert durch:

1. eine nicht-leere, endliche Menge Q von **Zuständen**,
2. eine partielle Funktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ (die **Übergangsfunktion**),
3. einen Zustand $q_0 \in Q$ (dem **Startzustand**),
4. eine Menge $F \subseteq Q$ von **akzeptierenden Zuständen**.

Wir schreiben dies als $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Deterministische Endliche Automaten

DFA

Ein deterministischer endlicher Automat (DFA) A über einem Alphabet Σ wird definiert durch:

1. eine nicht-leere, endliche Menge Q von **Zuständen**,
2. eine partielle Funktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ (die **Übergangsfunktion**),
3. einen Zustand $q_0 \in Q$ (dem **Startzustand**),
4. eine Menge $F \subseteq Q$ von **akzeptierenden Zuständen**.

Wir schreiben dies als $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Erweiterte Übergangsfunktion

Erweitere δ zu $\delta : Q \times \Sigma^* \to Q$ durch:

$$\delta(q, \varepsilon) := q,$$

$$\delta(q, aw) := \delta\left(\delta\left(q, a\right), w\right).$$

Deterministische Endliche Automaten

DFA

Ein deterministischer endlicher Automat (DFA) A über einem Alphabet Σ wird definiert durch:

1. eine nicht-leere, endliche Menge Q von **Zuständen**,
2. eine partielle Funktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ (die **Übergangsfunktion**),
3. einen Zustand $q_0 \in Q$ (dem **Startzustand**),
4. eine Menge $F \subseteq Q$ von **akzeptierenden Zuständen**.

Wir schreiben dies als $A := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

Erweiterte Übergangsfunktion

Erweitere δ zu $\delta : Q \times \Sigma^* \to Q$ durch:

$$\delta(q, \varepsilon) := q,$$

$$\delta(q, aw) := \delta\left(\delta\left(q, a\right), w\right).$$

von A akzeptierte Sprache:

$\mathcal{L}(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in F\}$

Starte in q_0, arbeite w von links nach rechts ab. Akzeptiere, wenn am Ende in F.

Handwerkszeug

Hilfreiche Definitionen

Sei $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

- A ist **vollständig**, wenn δ total ist.

Handwerkszeug

Hilfreiche Definitionen

Sei $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

- A ist **vollständig**, wenn δ total ist.
- $q \in Q$ **erreichbar von** $p \in Q$: Es ex. $w \in \Sigma^*$ mit $\delta(p, w) = q$

Handwerkszeug

Hilfreiche Definitionen

Sei $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

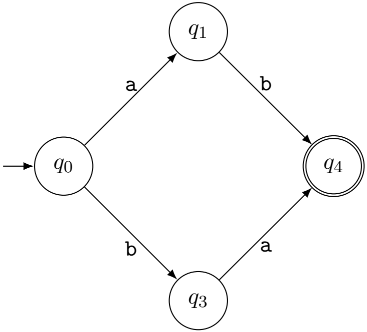
- A ist **vollständig**, wenn δ total ist.
- $q \in Q$ **erreichbar von** $p \in Q$: Es ex. $w \in \Sigma^*$ mit $\delta(p, w) = q$
- $q \in Q$ ist **Sackgasse**: von q ist kein akzeptierender Zustand erreichbar

Handwerkszeug

Hilfreiche Definitionen

Sei $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

- A ist **vollständig**, wenn δ total ist.
- $q \in Q$ **erreichbar von** $p \in Q$: Es ex. $w \in \Sigma^*$ mit $\delta(p, w) = q$
- $q \in Q$ ist **Sackgasse**: von q ist kein akzeptierender Zustand erreichbar

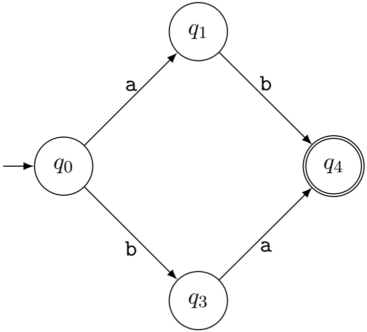


Handwerkszeug

Hilfreiche Definitionen

Sei $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

- A ist **vollständig**, wenn δ total ist.
- $q \in Q$ **erreichbar von** $p \in Q$: Es ex. $w \in \Sigma^*$ mit $\delta(p, w) = q$
- $q \in Q$ ist **Sackgasse**: von q ist kein akzeptierender Zustand erreichbar

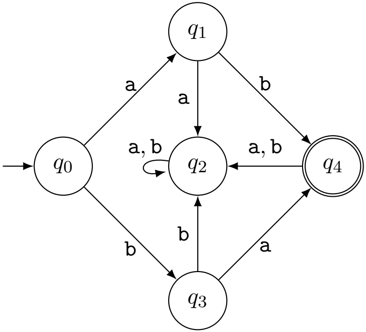


- dieser DFA ist nicht vollständig

Hilfreiche Definitionen

Sei $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

- A ist **vollständig**, wenn δ total ist.
- $q \in Q$ **erreichbar von** $p \in Q$: Es ex. $w \in \Sigma^*$ mit $\delta(p, w) = q$
- $q \in Q$ ist **Sackgasse**: von q ist kein akzeptierender Zustand erreichbar

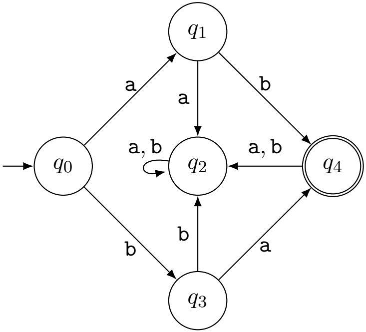


- dieser DFA ist nicht vollständig
- aber wir können ihn vervollständigen

Hilfreiche Definitionen

Sei $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

- A ist **vollständig**, wenn δ total ist.
- $q \in Q$ **erreichbar von** $p \in Q$: Es ex. $w \in \Sigma^*$ mit $\delta(p, w) = q$
- $q \in Q$ ist **Sackgasse**: von q ist kein akzeptierender Zustand erreichbar



- dieser DFA ist nicht vollständig
- aber wir können ihn vervollständigen

Lemma

Zu jedem DFA A existiert ein vollständiger DFA A' mit $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$.

Reguläre Sprachen

Reguläre Sprache

Sei Σ ein Alphabet. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **regulär**, wenn ein DFA A existiert, der L akzeptiert. (Also $\mathcal{L}(A) = L$).

Klasse aller regulären Sprachen

$$\mathrm{REG}_\Sigma := \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist regulär}\},$$

$$\mathrm{REG} := \bigcup_{\Sigma \text{ ist ein Alphabet}} \mathrm{REG}_\Sigma\,.$$

Reguläre Sprachen

Reguläre Sprache

Sei Σ ein Alphabet. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **regulär**, wenn ein DFA A existiert, der L akzeptiert. (Also $\mathcal{L}(A) = L$).

Klasse aller regulären Sprachen

$$\mathrm{REG}_\Sigma := \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist regulär}\},$$

$$\mathrm{REG} := \bigcup_{\Sigma \text{ ist ein Alphabet}} \mathrm{REG}_\Sigma \,.$$

Satz

$\mathrm{FIN} \subset \mathrm{REG}$

Reguläre Sprachen

Reguläre Sprache

Sei Σ ein Alphabet. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **regulär**, wenn ein DFA A existiert, der L akzeptiert. (Also $\mathcal{L}(A) = L$).

Klasse aller regulären Sprachen

$$\mathrm{REG}_\Sigma := \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist regulär}\},$$

$$\mathrm{REG} := \bigcup_{\Sigma \text{ ist ein Alphabet}} \mathrm{REG}_\Sigma \,.$$

Satz

$\mathrm{FIN} \subset \mathrm{REG}$

- $\mathrm{FIN} \subseteq \mathrm{REG}$: Übung
- $\mathrm{FIN} \neq \mathrm{REG}$: Einfach.

Reguläre Sprachen

Reguläre Sprache

Sei Σ ein Alphabet. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **regulär**, wenn ein DFA A existiert, der L akzeptiert. (Also $\mathcal{L}(A) = L$).

Klasse aller regulären Sprachen

$$\mathrm{REG}_\Sigma := \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist regulär}\},$$
$$\mathrm{REG} := \bigcup_{\Sigma \text{ ist ein Alphabet}} \mathrm{REG}_\Sigma\,.$$

Satz

$\mathrm{FIN} \subset \mathrm{REG}$

- $\mathrm{FIN} \subseteq \mathrm{REG}$: Übung
- $\mathrm{FIN} \neq \mathrm{REG}$: Einfach.

- Ist eigentlich jede Sprache regulär?

Nicht-reguläre Sprachen

Pumping-Lemma

Sei Σ ein Alphabet. Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ existiert eine **Pumpkonstante** $n_L \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n_L$ folgende Bedingung erfüllt ist: Es existieren Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ mit

1. $uvw = z$,
2. $|v| \geq 1$,
3. $|uv| \leq n_L$,
4. und für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $uv^iw \in L$.

Nicht-reguläre Sprachen

Pumping-Lemma

Sei Σ ein Alphabet. Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ existiert eine **Pumpkonstante** $n_L \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n_L$ folgende Bedingung erfüllt ist: Es existieren Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ mit

1. $uvw = z$,
2. $|v| \geq 1$,
3. $|uv| \leq n_L$,
4. und für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $uv^iw \in L$.

Beweisidee

1. zu jedem $L \in \mathrm{REG}$ existiert ein DFA A mit $\mathcal{L}(A) = L$
2. ist $w \in L$ länger als Zahl der Zustände, kommt beim Akzeptieren von w mindestens ein Zustand q_m doppelt vor
3. q_m ist Teil einer Schleife, benutze Schleife zum Pumpen.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Ansatz

- Zu zeigen: $L \notin \mathrm{REG}$
- „Angenommen, $L \in \mathrm{REG}$. Dann existiert Pumpkonstante n_L."
- Konstruiere passendes $z \in L$, $|z| \geq n_L$
- Zeige: Jede Zerlegung von z in u, v, w, die dem Pumping-Lemma entspricht, führt bei geeigneter Wahl von i zu einem Widerspruch.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Ansatz

- Zu zeigen: $L \notin \mathrm{REG}$
- „Angenommen, $L \in \mathrm{REG}$. Dann existiert Pumpkonstante n_L."
- Konstruiere passendes $z \in L$, $|z| \geq n_L$
- Zeige: Jede Zerlegung von z in u, v, w, die dem Pumping-Lemma entspricht, führt bei geeigneter Wahl von i zu einem Widerspruch.

Bitte beachten!

Das Pumping-Lemma kann nur zum Beweis von Nicht-Regularität verwendet werden, **nicht** für den Beweis von Regularität!

Anwendung des Pumping-Lemmas

Ansatz

- Zu zeigen: $L \notin \mathrm{REG}$
- „Angenommen, $L \in \mathrm{REG}$. Dann existiert Pumpkonstante n_L.“
- Konstruiere passendes $z \in L$, $|z| \geq n_L$
- Zeige: Jede Zerlegung von z in u, v, w, die dem Pumping-Lemma entspricht, führt bei geeigneter Wahl von i zu einem Widerspruch.

Bitte beachten!

Das Pumping-Lemma kann nur zum Beweis von Nicht-Regularität verwendet werden, **nicht** für den Beweis von Regularität!

Außerdem:

Manchmal hat das Pumping-Lemma keine Chance:
$L := \{b^i a^{j^2} \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$