Teil V

Weiterführende Themen, Teil 1: Kontextsensitive Sprachen und die Chomsky-Hierarchie

Zwei Sorten von Grammatiken

Kontextsensitive Grammatik (CSG)

(Σ, V, P, S), Regeln der Form

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$$

$\alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^*$, $A \in V$, $\gamma \in (\Sigma \cup V)^+$.

Wenn S nie auf einer rechten Seite einer Regel vorkommt, erlauben wir auch $S \to \varepsilon$.

Zwei Sorten von Grammatiken

Kontextsensitive Grammatik (CSG)

(Σ, V, P, S), Regeln der Form

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$$

$\alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^*$, $A \in V$, $\gamma \in (\Sigma \cup V)^+$.

- kontextsensitive Sprache: wird von CSG erzeugt.

Wenn S nie auf einer rechten Seite einer Regel vorkommt, erlauben wir auch $S \to \varepsilon$.

Zwei Sorten von Grammatiken

Kontextsensitive Grammatik (CSG)

(Σ, V, P, S), Regeln der Form

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$$

$\alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^*$, $A \in V$, $\gamma \in (\Sigma \cup V)^+$.

- kontextsensitive Sprache: wird von CSG erzeugt.
- CSL: Klasse der kontextsensitiven Sprachen.

Wenn S nie auf einer rechten Seite einer Regel vorkommt, erlauben wir auch $S \to \varepsilon$.

Zwei Sorten von Grammatiken

Kontextsensitive Grammatik (CSG)

(Σ, V, P, S), Regeln der Form

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$$

$\alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^*$, $A \in V$, $\gamma \in (\Sigma \cup V)^+$.

Monotone Grammatik

(Σ, V, P, S), Regeln der Form

$$\alpha \to \beta$$

mit $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^*$, $|\alpha| \leq |\beta|$.

- kontextsensitive Sprache: wird von CSG erzeugt.
- CSL: Klasse der kontextsensitiven Sprachen.

Wenn S nie auf einer rechten Seite einer Regel vorkommt, erlauben wir auch $S \to \varepsilon$.

Äquivalenz der Grammatiktypen

Von monotoner Grammatik zu CSG

1. Stelle sicher, dass Regeln die folgende Form haben:
   1. $\alpha \to \beta$, mit $\alpha, \beta \in V^+$, oder
   2. $A \to a$, mit $A \in V$, $a \in \Sigma$.

Äquivalenz der Grammatiktypen

Von monotoner Grammatik zu CSG

1. Stelle sicher, dass Regeln die folgende Form haben:
    1. $\alpha \rightarrow \beta$, mit $\alpha, \beta \in V^+$, oder
    2. $A \rightarrow a$, mit $A \in V$, $a \in \Sigma$.
2. Zerlege Regeln $\alpha \rightarrow \beta$ mit $|\alpha| \geq 2$.

Äquivalenz der Grammatiktypen

Von monotoner Grammatik zu CSG

1. Stelle sicher, dass Regeln die folgende Form haben:
   1. $\alpha \to \beta$, mit $\alpha, \beta \in V^+$, oder
   2. $A \to a$, mit $A \in V$, $a \in \Sigma$.
2. Zerlege Regeln $\alpha \to \beta$ mit $|\alpha| \geq 2$.
   Diese haben die Form
   $$A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$$
   mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $2 \leq m \leq n$

Zerlegen von Regeln

Zu zerlegende Regel

$$A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $2 \leq m \leq n$.

Zerlegen von Regeln

Zu zerlegende Regel

$$A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $2 \leq m \leq n$.

$$A_1 A_2 \cdots A_m \to X_1 A_2 \cdots A_m,$$

Zerlegen von Regeln

Zu zerlegende Regel

$$A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $2 \leq m \leq n$.

$$A_1 A_2 \cdots A_m \to X_1 A_2 \cdots A_m,$$
$$X_1 A_2 \cdots A_m \to X_1 X_2 A_3 \cdots A_m,$$

Zerlegen von Regeln

Zu zerlegende Regel

$$A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $2 \leq m \leq n$.

$$A_1 A_2 \cdots A_m \to X_1 A_2 \cdots A_m,$$
$$X_1 A_2 \cdots A_m \to X_1 X_2 A_3 \cdots A_m,$$
$$\vdots$$

Zerlegen von Regeln

Zu zerlegende Regel

$$A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $2 \leq m \leq n$.

$$\begin{aligned}
A_1 A_2 \cdots A_m &\to X_1 A_2 \cdots A_m, \\
X_1 A_2 \cdots A_m &\to X_1 X_2 A_3 \cdots A_m, \\
&\vdots \\
X_1 X_2 \cdots X_{m-1} A_m &\to X_1 X_2 \cdots X_m B_{m+1} \cdots B_n,
\end{aligned}$$

Zerlegen von Regeln

Zu zerlegende Regel

$$A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $2 \leq m \leq n$.

$$\begin{aligned}
A_1 A_2 \cdots A_m &\to X_1 A_2 \cdots A_m, \\
X_1 A_2 \cdots A_m &\to X_1 X_2 A_3 \cdots A_m, \\
&\vdots \\
X_1 X_2 \cdots X_{m-1} A_m &\to X_1 X_2 \cdots X_m B_{m+1} \cdots B_n, \\
X_1 X_2 \cdots X_m B_{m+1} \cdots B_n &\to B_1 X_2 \cdots X_m B_{m+1} \cdots B_n,
\end{aligned}$$

Zerlegen von Regeln

Zu zerlegende Regel

$$A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $2 \leq m \leq n$.

$$\begin{aligned}
A_1 A_2 \cdots A_m &\to X_1 A_2 \cdots A_m,\\
X_1 A_2 \cdots A_m &\to X_1 X_2 A_3 \cdots A_m,\\
&\vdots\\
X_1 X_2 \cdots X_{m-1} A_m &\to X_1 X_2 \cdots X_m B_{m+1} \cdots B_n,\\
X_1 X_2 \cdots X_m B_{m+1} \cdots B_n &\to B_1 X_2 \cdots X_m B_{m+1} \cdots B_n,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zerlegen von Regeln

Zu zerlegende Regel

$$A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $2 \leq m \leq n$.

$$\begin{aligned}
A_1 A_2 \cdots A_m &\to X_1 A_2 \cdots A_m, \\
X_1 A_2 \cdots A_m &\to X_1 X_2 A_3 \cdots A_m, \\
&\vdots \\
X_1 X_2 \cdots X_{m-1} A_m &\to X_1 X_2 \cdots X_m B_{m+1} \cdots B_n, \\
X_1 X_2 \cdots X_m B_{m+1} \cdots B_n &\to B_1 X_2 \cdots X_m B_{m+1} \cdots B_n, \\
&\vdots \\
B_1 \cdots B_{m-1} X_m B_{m+1} \cdots B_n &\to B_1 \cdots B_n,
\end{aligned}$$

Beispiel 1

$$G := (\Sigma, V, P, S),$$
$$\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\},$$
$$V := \{S, A, B, C\},$$

$$\begin{aligned} P := {} & \{S \to SABC, S \to ABC\} \\ & \cup \big\{XY \to YX \mid X, Y \in \{A, B, C\}\big\} \\ & \cup \{A \to \mathtt{a}, B \to \mathtt{b}, C \to \mathtt{c}\}. \end{aligned}$$

Beispiel 2

$$G := (\Sigma, V, P, S), \quad \Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, \quad V := \{S, B\}$$

$$\begin{aligned} P := \{S &\to \mathtt{a}SB\mathtt{c}, & \mathtt{c}B &\to B\mathtt{c}, \\ S &\to \mathtt{abc}, & \mathtt{b}B &\to \mathtt{bb}\}. \end{aligned}$$

Beispiel 3

Sei Σ ein Alphabet.

$$G := (\Sigma, V, P, S),$$
$$V := \{S\} \cup \{L_a, R_a, X_a \mid a \in \Sigma\},$$

$$\begin{aligned} P := & \{S \to aSX_a \mid a \in \Sigma\} \\ & \cup \{S \to L_a R_a \mid a \in \Sigma\} \\ & \cup \{R_a X_b \to X_b R_a \mid a, b \in \Sigma\} \\ & \cup \{R_a \to a \mid a \in \Sigma\} \\ & \cup \{L_a X_b \to L_a R_b \mid a, b \in \Sigma\} \\ & \cup \{L_a \to a \mid a \in \Sigma\}. \end{aligned}$$

Zwei Beobachtungen zu CSL

Satz

$\mathrm{CFL} \subset \mathrm{CSL}$

Zwei Beobachtungen zu CSL

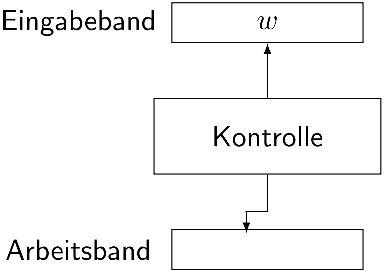
Satz

$\mathrm{CFL} \subset \mathrm{CSL}$

Satz

Das Wortproblem für monotone Grammatiken ist entscheidbar.

Ein Maschinenmodell für CSL



Linear beschränkte Turingmaschine (LBA)

- Eingabeband (nur Lesen, beide Richtungen)
- nichtdeterministische endliche Kontrolle,
- Arbeitsband
  (Lesen und Schreiben, beide Richtungen)

LBAs und CSL

Satz

Eine Sprache L ist genau dann kontextsensitiv, wenn Sie von einem LBA akzeptiert wird.

LBAs und CSL

Satz

Eine Sprache L ist genau dann kontextsensitiv, wenn Sie von einem LBA akzeptiert wird.

Idee $\Rightarrow$

- simuliere monotone Grammatik in LBA
- möglich, da nur Satzformen beschränkter Länge betrachtet werden müssen

LBAs und CSL

Satz

Eine Sprache L ist genau dann kontextsensitiv, wenn Sie von einem LBA akzeptiert wird.

Idee $\Rightarrow$

- simuliere monotone Grammatik in LBA
- möglich, da nur Satzformen beschränkter Länge betrachtet werden müssen

Idee $\Leftarrow$

- simuliere LBA in monotoner Grammatik
- Satzform entspricht Arbeitsband

Allgemeine Grammatiken

Phrasenstrukturgrammatik (PSG)

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- Regeln $\alpha \to \beta$ mit $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^*$

Allgemeine Grammatiken

Phrasenstrukturgrammatik (PSG)

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- Regeln $\alpha \to \beta$ mit $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^*$

Satz

Sei Σ, $L \subseteq \Sigma^*$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Es existiert eine Phrasenstrukturgrammatik G mit $\mathcal{L}(G) = L$.
2. Es existiert eine Turingmaschine M mit $\mathcal{L}(M) = L$.
3. Die Sprache L ist rekursiv aufzählbar.

Allgemeine Grammatiken

Phrasenstrukturgrammatik (PSG)

- $G := (\Sigma, V, P, S)$
- Regeln $\alpha \to \beta$ mit $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup V)^*$

RE: Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen.

Satz

Sei Σ, $L \subseteq \Sigma^*$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Es existiert eine Phrasenstrukturgrammatik G mit $\mathcal{L}(G) = L$.
2. Es existiert eine Turingmaschine M mit $\mathcal{L}(M) = L$.
3. Die Sprache L ist rekursiv aufzählbar.

Die Chomksky-Hierarchie

Satz

$\mathrm{REG} \subset \mathrm{CFL} \subset \mathrm{CSL} \subset \mathrm{RE}$

Die Chomksky-Hierarchie

Satz

$\mathrm{REG} \subset \mathrm{CFL} \subset \mathrm{CSL} \subset \mathrm{RE}$

Grammatik	**Automatenmodell**	**Sprachklasse**
Typ 0 PSG	Turingmaschine	RE
Typ 1 CSG	LBA	CSL
Typ 2 CFG	PDA	CFL
Typ 3 reg. G.	endlicher Automat	REG