

# Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

## Übungsblatt 1

**Abgabe:** bis 3. November 2010, 8.<sup>15</sup> Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)

Bitte achten Sie darauf, dass Sie auf der Abgabe Ihrer Lösung Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihre **Übungsgruppe** angeben. Mehrseitige Abgaben müssen **zusammengeheftet** werden.

Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

### Aufgabe 1:

(29 Punkte)

Gegeben seien drei Stapel von Büchern. Der Erste besteht aus vier Büchern, der Zweite aus sechs und der Dritte aus 14 Büchern. Ziel ist es, die Stapel der Bücher schrittweise so auszugleichen, dass auf jedem Stapel acht Bücher liegen. Dabei dürfen pro Schritt nur Bücher zwischen genau zwei Stapeln umgeschichtet werden. Zudem können auf jeden Stapel nur exakt so viele Bücher hinzukommen, wie bereits darauf liegen und kein Stapel darf aufgelöst werden, d.h. auf jedem der drei Stapel muss zumindest ein Buch liegen. Außerdem soll immer gelten, dass entweder alle Stapel gleich groß oder alle Stapel unterschiedlich groß sind.

Modellieren Sie zur Beantwortung der folgenden Fragen das Problem durch ein Transitionssystem analog zum „Murmelbeispiel“ aus der Vorlesung.

- (a) Lassen sich die Stapel wie gewünscht ausgleichen?
- (b) Kann man durch ungeschicktes Umstapeln unter Berücksichtigung der Regeln in eine Situation geraten, aus der der gewünschte Zustand nicht mehr herstellbar ist?
- (c) Wie viele Schritte sind mindestens nötig, wenn unter den selben Bedingungen drei Stapel der Größen zwei, sechs und 16 ausgeglichen werden sollen?

*Hinweise:*

- (i) Es brauchen bei der Modellierung nur die Zustände betrachtet werden, welche vom Anfangszustand aus erreichbar sind.
- (ii) Für die Modellierung ist die Reihenfolge der Stapel unerheblich, das heißt, es ist egal, welcher Stapel der erste, zweite und dritte ist.

**Aufgabe 2:****(21 Punkte)**

Sei  $U := \{35, 36, 37, \dots, 45\}$  ein festes Universum mit  $U \subseteq \mathbb{N}$  und seien  $M := \{42\}$ ,  $N := \{36, 38, 40, 42, 44\}$  und  $P := \{35, 40, 45\}$ . Schreiben Sie jede der folgenden Mengen in extensio-naler Form auf und geben Sie ihre Kardinalität an.

- (a)  $\{x \in \mathbb{N} : x^2 \in N\}$       (c)  $(M \cup P) \times \{\times\} \times \{14\}$       (e)  $\{x \in \overline{N \cup P} : x \text{ ist Primzahl}\}$   
 (b)  $(P \setminus N) \cup M$       (d)  $(M \cap P) \times \mathcal{P}(N)$       (f)  $\{\emptyset\}^2$

Gelten die folgenden Aussagen? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

- (g)  $(42, 44) \in M \Delta N$       (h)  $\{\emptyset, 44\} \subsetneq \mathcal{P}(N)$       (i)  $(42, 36) \in (M \times N)^2$

**Aufgabe 3:****(25 Punkte)**

Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Gleichungen.

- (a)  $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$ .      (Satz 2.9 (e) 1. Gleichung)  
 (b)  $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$ .      (Satz 2.10 (b) 2. Gleichung)

**Aufgabe 4:****(25 Punkte)**

Timm ist bei den drei sozialen Netzwerken StudiVZ, Twitter und Facebook angemeldet. Auch alle seine Freunde sind bei mindestens einem dieser sozialen Netzwerke Mitglied. Sei  $S$  die Menge der Freunde von Timm, die sich bei StudiVZ und  $T$  die Menge der Freunde, die sich bei Twitter angemeldet haben. Außerdem sei  $F$  die Menge der Freunde von Timm, die Mitglied bei Facebook sind. Durch seine Recherchen hat Timm folgende Informationen zusammen getragen:

$$|S| = 15, \quad |T| = 18, \quad |F| = 18, \quad |S \cap T| = 6, \quad |S \cap F| = 5, \quad |T \cap F| = 7, \quad |S \cap T \cap F| = 2$$

- (a) Wie viele Freunde hat Timm?  
D.h. berechnen Sie  $|S \cup T \cup F|$ .
- (b) Wie viele von Timms Freunden sind in genau zwei der sozialen Netzwerke angemeldet?  
D.h. berechnen Sie  $|((S \cap T) \cup (S \cap F) \cup (T \cap F)) \setminus (S \cap T \cap F)|$ .
- (c) Timm möchte eine Nachricht schreiben, die alle seine Freunde bei StudiVZ erhalten und zusätzlich alle seine Freunde, die bei Twitter aber nicht gleichzeitig bei Facebook ange-meldet sind. An wie viele seiner Freunde muss Timm diese Nachricht schreiben? D.h. berechnen Sie  $|S \cup (T \setminus F)|$ .

*Hinweis:* Überlegen Sie sich zunächst anhand von Venn-Diagrammen, wie man die Kardinalitä-ten der Mengen berechnen kann.