

Diskrete Modellierung

Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 6

Abgabe: bis 8. Dezember 2010, 8.¹⁵ Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)

ACHTUNG: Fehlt eine der drei Angaben Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe auf Ihrer Abgabe, müssen Sie mit Punktabzug rechnen. Mehrseitige Abgaben müssen **zusammengeheftet** werden.

Eine Aufgabe gilt nur dann als bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

Aufgabe 1:

(30 Punkte)

- (a) Geben Sie die folgenden Graphen G_1 und G_2 in graphischer Darstellung an.

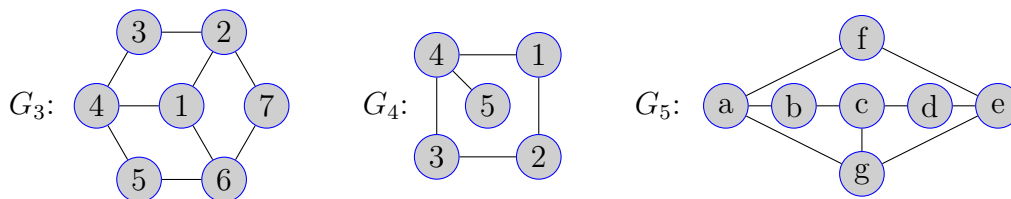
Hinweis: Beachten Sie dabei, ob es sich jeweils um einen gerichteten oder einen ungerichteten Graphen handelt.

(i) $G_1 = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, x = y + 2\})$

(ii) $G_2 = (\{x \in \mathbb{N}_{>0} : 1 \leq x \leq 6\}, \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}_{>0}, 1 \leq x, y \leq 6, x + y > 6\})$

Sind die Graphen G_1 und G_2 zusammenhängend bzw. stark zusammenhängend? Sind sie azyklisch?

- (b) Seien G_3 , G_4 und G_5 die folgenden Graphen:



- (i) Geben Sie jeweils die Knoten- und Kantenmenge von G_3 und G_4 an.
- (ii) Repräsentieren Sie den Graphen G_3 durch eine Adjazenzliste und G_4 durch eine Adjazenzmatrix.
- (iii) Gelten die folgenden Aussagen ?
- (I.) G_3 ist bipartit. Geben Sie ggf. die Partitionierung der Knoten an.
 - (II.) $G_3 \cong G_4$. Geben Sie ggf. einen Isomorphismus an.
 - (III.) $G_3 \cong G_5$. Geben Sie ggf. einen Isomorphismus an.
 - (IV.) G_4 ist ein induzierter Teilgraph von G_3 .
 - (V.) G_4 ist ein induzierter Teilgraph von G_5 .
- (iv) Geben Sie in G_3 einen nicht einfachen Weg an, der kein Kreis ist.
- (v) Geben Sie in G_5 einen einfachen Kreis maximaler Länge an.

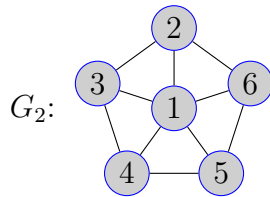
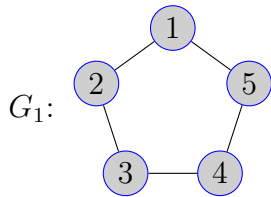
Aufgabe 2:**(20 Punkte)**

Beweisen Sie, dass die folgende Aussage für jeden endlichen, ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt: Ist $|V| \geq 2$, so existieren zwei verschiedene Knoten $v, v' \in V$ mit $\text{Grad}_G(v) = \text{Grad}_G(v')$.

Aufgabe 3:**(25 Punkte)**

Alice und Bob spielen ein Spiel auf einem endlichen, zusammenhängenden und ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Die Spieler wählen abwechselnd Knoten v_1, v_2, v_3, \dots aus V , so dass v_1, v_2, v_3, \dots verschiedene Knoten sind und jeweils gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Alice wählt den ersten Knoten. Der letzte Spieler, der einen Knoten wählen kann, gewinnt.

Eine *Gewinnstrategie* für einen Spieler in diesem Spiel ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als nächstes tätigen soll. Hält sich der Spieler an diese Vorschrift, so gewinnt er auf jeden Fall.



(a) Geben Sie für jeden der beiden nebenstehenden Graphen G_1 und G_2 ein Matching maximaler Größe an und entscheiden Sie, welcher der beiden Spieler in dem Spiel auf dem entsprechenden Graph eine Gewinnstrategie hat.

(b) Beweisen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

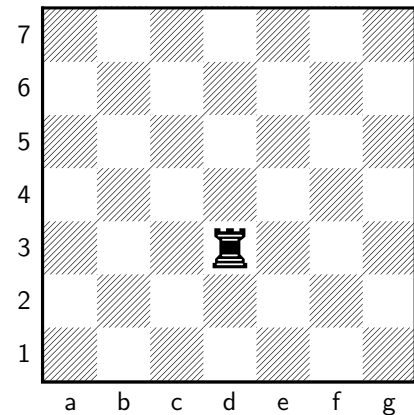
- (i) G besitzt ein Matching M , so dass jeder Knoten aus V zu genau einer Kante aus M inzident ist.
- (ii) Bob hat eine Gewinnstrategie in dem oben beschriebenen Spiel auf G .

Aufgabe 4:**(25 Punkte)**

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage: In einem endlichen, bipartiten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ und einer ungeraden Anzahl von Knoten kann es keinen Hamilton-Kreis geben.

(b) Es sei ein 7×7 -Schachbrett mit einem beliebig darauf platzierten Turm wie in der nebenstehenden Abbildung gegeben. Ein *Trippelschritt* des Turms ist ein Zug des Turms auf ein Feld, das direkt unterhalb, direkt oberhalb, direkt links oder direkt rechts von seinem Feld liegt. In der Abbildung kann der Turm vom Feld d3 aus genau vier Trippelschritte machen: nach e3, d2, c3 oder d4.

Eine *Trippelschritt-Turm-Tour* TTT ist eine Zugfolge des Turms von einem beliebigen Startfeld aus, in der der Turm nur Trippelschritte macht, jedes Feld außer dem Startfeld genau einmal betritt und abschließend (und nicht vorher) wieder zum Startfeld zurückkehrt.



Beweisen Sie, dass es auf dem 7×7 -Schachbrett keine TTT geben kann, egal, wo der Turm startet.

Bemerkung: Ein übliches Schachbrett besteht aus 8×8 Feldern. Auf einem solchen Schachbrett existiert eine TTT, egal, von welchem Feld aus gestartet wird. Um Teilaufgabe (b) zu lösen, können Sie die Aussage aus Teilaufgabe (a) benutzen, auch wenn Sie diese nicht gelöst haben.