Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. Mai 2011

Diskrete Modellierung (SoSe 2011)
Klausur (Modulabschlussprüfung)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

⇓ BITTE GENAU LESEN ⇓

- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind zu dieser Klausur keine weiteren Hilfsmittel erlaubt. Bitte beachten Sie, dass das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel eine Täuschung darstellt und zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur führt.

  Insbesondere müssen Sie Ihre Handys vor Beginn der Klausur ausschalten.
- Bitte legen Sie Ihre Goethe-Card bzw. Ihren Studierendenausweis und einen gültigen Lichtbildausweis deutlich sichtbar an Ihren Platz, damit wir im Laufe der Klausur die Identität überprüfen können.
- Zur Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung.
- Überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar der Klausur alle von 2 bis 21 durchnummerierten Seiten enthält.
- Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen direkt an die dafür vorgesehene Stelle. Gegebenenfalls können Sie auch die beigefügten Zusatzblätter benutzen. Weitere Blätter sind auf Nachfrage erhältlich.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung dies verlangt.
- Jedes Blatt der abgegebenen Lösung muss mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer gekennzeichnet sein; andernfalls werden diese Blätter nicht gewertet.
- Schreiben Sie ausschließlich mit einem dokumentenechten blauen oder schwarzen Stift – alle mit einem anderen Stift angefertigten Lösungen werden nicht gewertet.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für **eine** Lösung.
- In der Klausur können maximal 100 Punkte erreicht werden. Die in den Übungsaufgaben im WS 10/11 erworbenen Bonuspunkte werden zu der in der Klausur erreichten Punktzahl hinzuaddiert. Werden insgesamt $z \geq 50$ Punkte erreicht, so ist die Prüfung bestanden. Die Noten verteilen sich wie folgt:

Note	z	Note	z	Note	z	Note
1:			$z \geq 90$	$1,0$	$90 > z \geq 85$	$1,3$
2:	$85 > z \geq 80$	$1,7$	$80 > z \geq 76$	$2,0$	$76 > z \geq 72$	$2,3$
3:	$72 > z \geq 67$	$2,7$	$67 > z \geq 63$	$3,0$	$63 > z \geq 59$	$3,3$
4:	$59 > z \geq 54$	$3,7$	$54 > z \geq 50$	$4,0$		

- Die Ergebnisse der Klausur und Termine zur Klausureinsicht werden spätestens am 31.05.2011 auf der zur Vorlesung gehörenden Internetseite

  `http://www.tks.informatik.uni-frankfurt.de/teaching/ws10/dismod`

  bekannt gegeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Klausur	Bonus	Gesamt
maximale Punkte	20	23	13	8	20	16	100	10	110
erreichte Punkte									

Note:

Aufgabe 1: **(20 Punkte)**

(a) Nachdem Hänsel und Gretel die Hexe in den Ofen gestoßen haben, wollen sie sich über das Knusperhäuschen hermachen. Doch wie allgemein bekannt ist, muss man beim Verzehr eines solchen Hauses mit äußerster Vorsicht vorgehen, da dieses sonst zur Instabilität neigt. Die beiden wenden sich zunächst einer Wand zu, welche aus drei Lebkuchen besteht. Da Gretel erfolgreich Knusperhäuschenarchitektur studiert hat, kennt Sie die folgenden Sicherheitsregeln: (8 Pkte)

Regel 1: Von den beiden ersten Lebkuchen darf höchstens einer entfernt werden.

Regel 2: Wenn man den dritten entfernt, muss man auch den zweiten entfernen.

Regel 3: Wenn man den zweiten entfernt und den ersten nicht, dann darf man den dritten nicht entfernen.

Formalisieren Sie die drei Aussagen durch je eine aussagenlogische Formel, indem Sie die atomaren Aussagen E (die beiden entfernen den ersten Lebkuchen), Z (die beiden entfernen den zweiten Lebkuchen) und D (die beiden entfernen den dritten Lebkuchen) benutzen.

$\varphi_{\text{Regel 1}} :=$

$\varphi_{\text{Regel 2}} :=$

$\varphi_{\text{Regel 3}} :=$

Hänsel warnt Gretel davor, den dritten Lebkuchen zu entfernen. Ist seine Sorge berechtigt? Beweisen Sie, dass Ihre Aussage stimmt.

(b) Welche der folgenden Formeln ist in Negationsnormalform (NNF), disjunktiver Normalform (DNF) und/oder konjunktiver Normalform (KNF)? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen halben Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein halber Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

	$\neg X_2$		$(((X_1 \vee \neg X_2) \wedge \neg X_1) \vee (X_2 \wedge X_3))$	
in NNF?	☐ ja	☐ nein	☐ ja	☐ nein
in DNF?	☐ ja	☐ nein	☐ ja	☐ nein
in KNF?	☐ ja	☐ nein	☐ ja	☐ nein

(c) Welche der folgenden Aussagen sind für alle aussagenlogischen Formeln φ und ψ wahr? Welche nicht? (3 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

Jede atomare aussagenlogische Formel enthält mindestens eine aussagenlogische Variable.	☐ wahr	☐ falsch
φ ist unerfüllbar gdw. $\neg\varphi$ erfüllbar ist.	☐ wahr	☐ falsch
Die Syntaxbäume zweier äquivalenter aussagenlogischer Formeln haben gleich viele Blätter.	☐ wahr	☐ falsch

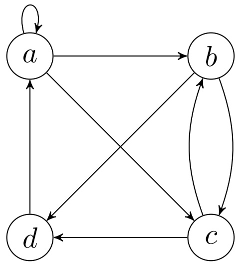
(d) Wann heißt eine aussagenlogische Formel allgemeingültig (bzw. Tautologie)? Geben Sie eine exakte Definition an! (2 Pkte)

Sei φ eine aussagenlogische Formel.
φ heißt allgemeingültig (bzw. Tautologie), wenn

(e) Sei $\varphi = ((X_1 \wedge X_2) \rightarrow (\neg X_2 \vee \neg X_1))$ und $\psi = (X_1 \vee X_2)$. Gilt $\varphi \models \psi$? Begründen Sie Ihre Antwort! (4 Pkte)

Aufgabe 2: **(23 Punkte)**

(a) Sei $G = (V, E)$ der folgende *gerichtete* Graph:



(i) Geben Sie die Knotenmenge V und die Kantenmenge E von G an. Repräsentieren Sie G außerdem durch eine Adjazenzmatrix.

$V =$ (1 Pkt)

$E =$ (1 Pkt)

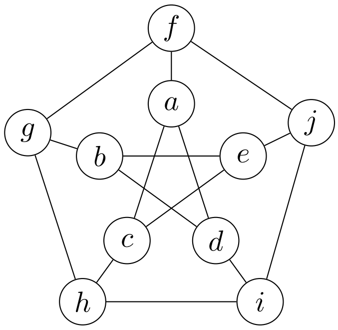
Adjazenzmatrix: (1 Pkt)

(ii) Geben Sie Ein-Grad$_G(a)$ an: (1 Pkt)

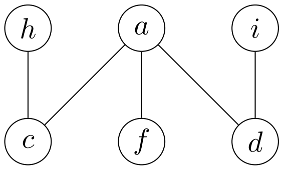
(iii) Geben Sie den längsten einfachen Weg vom Knoten b zum Knoten c an: (1 Pkt)

(iv) Geben Sie die Kante an, die entfernt werden muss, damit der enstehende Graph nicht mehr stark zusammenhängend ist: (1 Pkt)

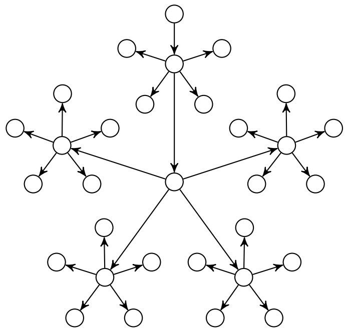
(b) Es seien die folgenden ungerichteten Graphen G_1 und G_2 sowie der gerichtete Graph G_3 gegeben:



G_1



G_2



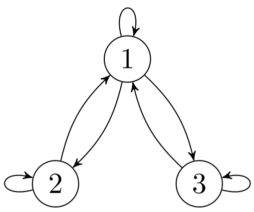
G_3

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (3 Pkte)

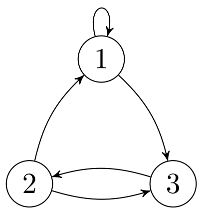
Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

- G_2 ist ein induzierter Teilgraph von G_1. ☐ wahr ☐ falsch
- Die Knoten von G_2 lassen sich konfliktfrei mit zwei verschiedenen Farben färben. ☐ wahr ☐ falsch
- G_3 ist ein gerichteter Baum der Höhe 4. ☐ wahr ☐ falsch

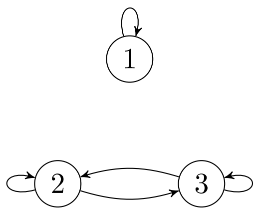
(c) Betrachten Sie die folgenden vier Graphen mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3\}$ und fassen Sie diese als 2-stellige Relationen R_1, R_2, R_3 und R_4 über $V \times V$ auf.



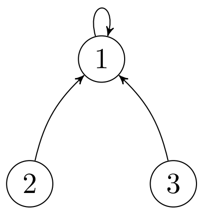
R_1



R_2



R_3



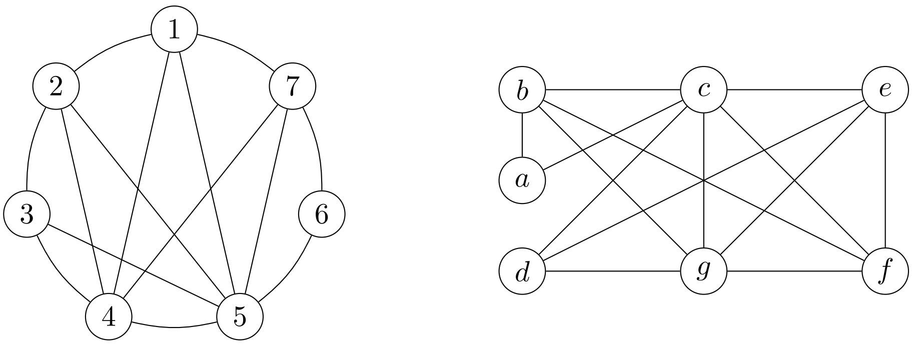
R_4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (4 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

- R_1 ist konnex. ☐ wahr ☐ falsch
- R_2 ist transitiv. ☐ wahr ☐ falsch
- R_3 ist eine Äquivalenzrelation. ☐ wahr ☐ falsch
- R_4 ist eine Funktion. ☐ wahr ☐ falsch

(d) Betrachten Sie die folgenden ungerichteten Graphen G_4 und G_5:



G_4 G_5

(i) G_4 und G_5 sind isomorph. Geben Sie einen Isomorphismus von G_4 nach G_5 an. (2 Pkte)

(ii) Enthält der Graph G_5 einen Hamilton-Kreis? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

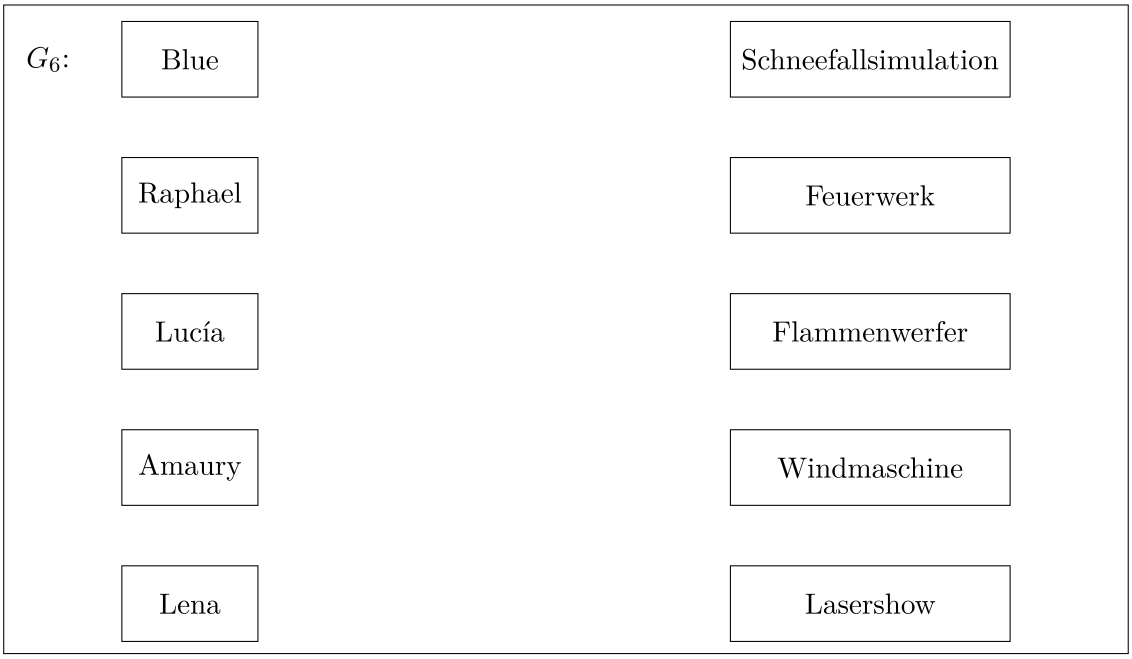
(e) In weniger als zwei Wochen findet das Finale des 56. Eurovision Song Contest in Düsseldorf statt. Fünf Länder stehen bereits als Finalteilnehmer fest, auch die jeweiligen Musiker sind schon bekannt: Amaury Vassili geht für Frankreich, Raphael Gualazzi für Italien auf die Bühne, das Vereinigte Königreich wird von der Gruppe Blue, Spanien von Lucía Pérez vertreten, Deutschland schließlich hofft wieder einmal auf Lena.

Um die Show herauszuputzen, kann jeder der fünf Finalteilnehmer sich einen von fünf Bühneneffekten aussuchen. Zur Wahl stehen eine Lasershow, eine Windmaschine, Feuerwerk, ein Flammenwerfer und eine Schneefallsimulation. Um die Langeweile der Zuschauer zu begrenzen, darf jeder Bühneneffekt nur höchstens einmal benutzt werden.

Natürlich haben alle Musiker ganz eigene Vorlieben für bestimmte Bühneneffekte, die sich im Einzelnen folgendermaßen darstellen:

- Blue sind mit jedem Bühneneffekt zufrieden, der keine Lasershow ist.
- Raphael mag Feuerwerk, den Flammenwerfer und die Windmaschine.
- Auch Lucía steht auf Flammenwerfer und Windmaschine, außerdem auf die Lasershow.
- Amaury schwärmt für die Windmaschine und die Lasershow.
- Für Lena kommt nur die Windmaschine in Frage.

(i) Stellen Sie den Graphen G_6 als *ungerichteten* Graphen auf, in dem jede Kante zwischen einem Musiker M und einem Bühneneffekt B verläuft und dafür steht, dass M mit B zufrieden wäre. (2 Pkte)



(ii) Handelt es sich bei G_6 um einen bipartiten Graphen? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Pkt)

(iii) Geben Sie ein Matching maximaler Größe in G_6 an. (2 Pkte)

Matching maximaler Größe in G_6:

Blue	Schneefallsimulation
Raphael	Feuerwerk
Lucía	Flammenwerfer
Amaury	Windmaschine
Lena	Lasershow

(iv) Geben Sie eine Zuordnung zwischen Bühneneffekten und Musikern an, so dass jeder Musiker genau einen Effekt erhält, jeder Effekt genau einmal zugeordnet wird und alle Musiker mit ihrer Zuordnung zufrieden sind. (1 Pkt)

Aufgabe 3: **(13 Punkte)**

(a) Sei $\sigma = \{\dot{Mult}, \dot{Nach}, \dot{Eins}\}$ eine Signatur mit einem dreistelligen Relationssymbol $\dot{Mult}$, einem einstelligen Funktionssymbol $\dot{Nach}$ und einem Konstantensymbol $\dot{Eins}$. Wir betrachten die σ-Struktur $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \dot{Mult}^{\mathfrak{A}}, \dot{Nach}^{\mathfrak{A}}, \dot{Eins}^{\mathfrak{A}})$ für die gilt:

$$\begin{aligned} \dot{Mult}^{\mathfrak{A}} &:= \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{N},\ x \cdot y = z\}, \\ \dot{Nach}^{\mathfrak{A}} &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } \dot{Nach}^{\mathfrak{A}}(x) = x + 1, \\ \dot{Eins}^{\mathfrak{A}} &:= 1. \end{aligned}$$

(i) Geben Sie eine Formel φ der Logik erster Stufe über der Signatur σ an, die in der σ-Struktur $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \dot{Mult}^{\mathfrak{A}}, \dot{Nach}^{\mathfrak{A}}, \dot{Eins}^{\mathfrak{A}})$ aussagt, dass für die modellierte Multiplikation das Kommutativgesetz gilt. (Zur Erinnerung: das Kommutativgesetz besagt, dass $n \cdot m = m \cdot n$ für alle natürliche Zahlen n und m gilt.) (2 Pkte)

(ii) Geben Sie eine Formel $\varphi(x)$ der Logik erster Stufe über der Signatur σ an, die in der σ-Struktur $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \dot{Mult}^{\mathfrak{A}}, \dot{Nach}^{\mathfrak{A}}, \dot{Eins}^{\mathfrak{A}})$ aussagt, dass die natürliche Zahl x eine Quadratzahl ist. (2 Pkte)

(iii) Was sagt die Formel (2 Pkte)

$$\varphi(x) := \exists y\ \exists z\ \left(\dot{Nach}(\dot{Eins}) \doteq y \wedge \dot{Mult}(z, y, x)\right)$$

in der σ-Struktur $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \dot{Mult}^{\mathfrak{A}}, \dot{Nach}^{\mathfrak{A}}, \dot{Eins}^{\mathfrak{A}})$ aus ?

(b) Sei $\sigma = \{\dot{E}\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol $\dot{E}$. (4 Pkte)
Geben Sie für die Formel

$$\varphi(x) := \ \forall y \ ((\neg x \dot{=} y) \rightarrow (\dot{E}(x,y) \wedge (\neg \exists z \dot{E}(y,z)))$$

eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathfrak{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathfrak{A}, \beta_2)$ an, so dass gilt:

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \varphi.$$

(c) Für eine Formel φ der Logik erster Stufe ist $\mathrm{Var}(\varphi)$ die Menge aller Variablen, die in der Formel φ vorkommen und $\mathrm{frei}(\varphi)$ die Menge aller Variablen, die mindestens einmal frei in φ vorkommen. Zusätzlich sei $\mathrm{geb}(\varphi)$ die Menge aller Variablen, die mindestens einmal gebunden in φ vorkommen. (3 Pkte)
Welche der folgenden Aussagen für Formeln der Logik erster Stufe sind wahr, welche sind falsch?

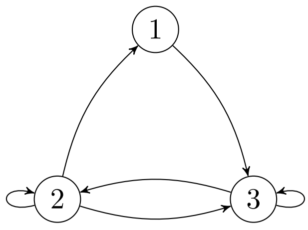
Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

$\mathrm{Var}(\varphi) = \mathrm{frei}(\varphi) \cup \mathrm{geb}(\varphi)$	☐ wahr	☐ falsch
$\mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{frei}(\varphi) = \mathrm{geb}(\varphi)$	☐ wahr	☐ falsch
Falls φ ein Satz ist, gilt: $\mathrm{frei}(\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi) \setminus \mathrm{geb}(\varphi)$	☐ wahr	☐ falsch

Aufgabe 4: **(8 Punkte)**

Betrachten Sie den folgenden Web-Graph G_1, der aus den drei Webseiten 1, 2 und 3 besteht, die entsprechend der gerichteten Kanten in der Abbildung untereinander verlinkt sind.

G_1:



(a) Stellen Sie für G_1 und den Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$ die Page-Rank-Matrix $P(G_1, d)$ auf. (4 Pkte)

(b) Es seien die drei Page-Ranks $\mathrm{PR}_1 = \frac{2}{9}$, $\mathrm{PR}_2 = \frac{1}{3}$ und $\mathrm{PR}_3 = \frac{4}{9}$ gegeben. Weisen Sie nach, dass dies die Page-Ranks für die drei Webseiten 1, 2 und 3 des Web-Graphen G_1 bezüglich des Dämpfungsfaktors $d = \frac{1}{2}$ sind. Das heißt, weisen Sie nach, dass das Tupel $\mathrm{PR} = (\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9})$ die Page-Rank-Eigenschaft bezüglich $d = \frac{1}{2}$ hat. (4 Pkte)

Aufgabe 5: **(20 Punkte)**

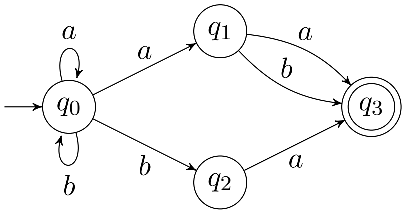
(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \ldots, \texttt{z}, \texttt{/}, \texttt{:}, \texttt{.}\}$ definiert, die die URL einer Webseite beschreiben, welche die Form (2,5 Pkte)

`http://` *3rd-level-label* *2nd-level-label* `.` *top-level-domain*

haben. Dabei ist *3rd-level-label* entweder das Wort `www.` oder die leere Zeichenkette und *2nd-level-label* ein nicht-leeres Wort, in dem keines der Zeichen `/`, `:` und `.` (also nur $\texttt{a}, \texttt{b}, \ldots, \texttt{z}$) vorkommt. Die Zeichenkette *top-level-domain* kann entweder aus `de`, `com` oder `org` bestehen. Wörter dieser Sprache sind also z. B. `http://dismod.com` und `http://www.informatik.de`, aber *nicht* `www.uni.com` oder `http://de.wikipedia.org` oder `http://www..de`.

$R =$

(b) Sei A der folgende nichtdeterministische endliche Automat über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$:



(i) Welche der folgenden Wörter liegen in der von A akzeptierten Sprache $L(A)$, welche nicht? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (3 Pkte)

Wort	. . . liegt in $L(A)$?	
bbbab	☐ ja	☐ nein
bbbabb	☐ ja	☐ nein
aaaaaaaaaaa	☐ ja	☐ nein

(ii) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(A)$ an, die vom Automaten A akzeptiert wird. (1,5 Pkte)

(iii) Wandeln Sie den NFA A mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion in einen DFA A' um. Berücksichtigen Sie dabei nur solche Zustände von A', die vom Startzustand von A' aus erreicht werden können. Geben Sie die graphische Darstellung von A' an. (4 Pkte)

(c) Geben Sie für jede der folgenden beiden Sprachen L_1 und L_2 jeweils an, ob es sich um reguläre Sprachen handelt. (Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl dieser Teilaufgabe ist aber mindestens 0.) (9 Pkte)

Beweisen Sie, dass Ihre jeweilige Antwort korrekt ist.

Zur Erinnerung:
Um zu beweisen, dass eine Sprache L regulär ist, genügt es, einen endlichen Automaten A oder einen regulären Ausdruck R anzugeben, so dass $L = L(A)$ bzw. $L = L(R)$ ist.
Um zu beweisen, dass eine Sprache *nicht* regulär ist, können Sie das Pumping-Lemma aus der Vorlesung benutzen:

Sei Σ ein endliches Alphabet. Für jede *reguläre* Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq z$ gilt: Es gibt eine Zerlegung von x in Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$, so dass die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(1) $x = uvw$
(2) $|uv| \leq z$
(3) $|v| \geq 1$
(4) für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt: $uv^iw \in L$.
(d.h.: $uw \in L$, $uvw \in L$, $uvvw \in L$, $uvvvw \in L$, $\ldots$)

$L_1 := \{b^n\, b^k\ : n, k \in \mathbb{N},\, n = k\}$

regulär: ☐ ja ☐ nein

Beweis:

$L_1 := \{b^n\, a^k\ : n, k \in \mathbb{N},\, n = k\}$

regulär: ☐ ja ☐ nein

Beweis:

Aufgabe 6: **(16 Punkte)**

(a) Im Folgenden wird die Menge AT der *arithmetischen Terme mit den Variablen a, b und c* über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c, +, -, \cdot, :, (,)\}$ rekursiv definiert:

Basisregel:

(B) Jede der Variablen a, b, c ist in AT.

Rekursive Regeln:

(R1) Ist w in AT, so ist auch $-w$ in AT.

(R2) Sind w_1 und w_2 in AT, so sind auch $(w_1 + w_2)$ und $(w_1 - w_2)$ in AT.

(R3) Sind w_1 und w_2 in AT, so sind auch $(w_1 \cdot w_2)$ und $(w_1 : w_2)$ in AT.

(i) Welche der folgenden Wörter gehören zur Sprache AT, welche nicht? (4 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**. Die Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

Wort	... liegt in AT?	
$-a$	☐ ja	☐ nein
$(a + (b - a))$	☐ ja	☐ nein
$(b - - - - - a)$	☐ ja	☐ nein
$(b \cdot (b - +a))$	☐ ja	☐ nein

(ii) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = AT$. (4 Pkte)

(iii) Betrachten Sie die von Ihnen in (b) angegebene kontextfreie Grammatik G und geben Sie einen Ableitungsbaum für das folgende Wort an: (2 Pkte)

$$-(a \cdot (b - c))$$

(b) Die zwei Algorithmen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ lösen bei Eingabe von mindestens zwei unterschiedlichen Wörtern das selbe Problem. Die Laufzeit g_1 von $\mathcal{A}_1$ bzw. g_2 von $\mathcal{A}_2$ ist abhängig von der Anzahl n der Eingabewörter und der Länge l des längesten Wortes der Eingabe. Insbesondere ist (6 Pkte)

$$g_1(n) = (1+l)^n \quad \text{und} \quad g_2(n) = 1 + n \cdot l$$

Zeigen Sie, dass der Algorithmus $\mathcal{A}_1$ im Allgemeinen langsamer als $\mathcal{A}_2$ ist, d.h. zeigen Sie per Induktion über n für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $n \geq 2$, dass für jedes $l \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$g_1(n) > g_2(n) \text{ , d.h. } (1+l)^n > 1 + n \cdot l$$